

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental**

**Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental**

**VAGNER JORDEN**

**INVESTIGAÇÕES SOBRE A INFLUÊNCIA DA MARÉ EM  
CANAIS FLUVIAIS**

Dissertação apresentada à Universidade  
Federal de Santa Catarina, para  
obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Ambiental.

Orientador: Prof. Eloi Melo Filho, Ph. D.

**FLORIANÓPOLIS  
SANTA CATARINA**

**Maio de 1998**

# INVESTIGAÇÕES SOBRE A INFLUÊNCIA DA MARÉ EM CANAIS FLUVIAIS

VAGNER JORDEN

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

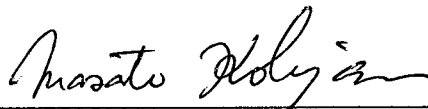
**MESTRE EM ENGENHARIA AMBIENTAL**

na Área de Uso e Proteção de Ambientes Costeiros

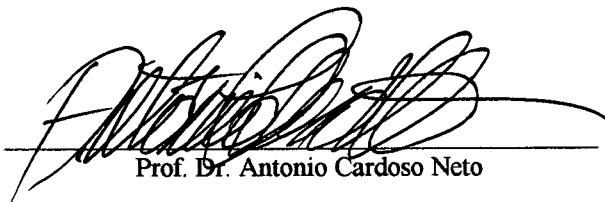
Aprovado por :



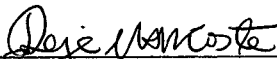
Prof. Dr. Eloi Melo Filho (Orientador)



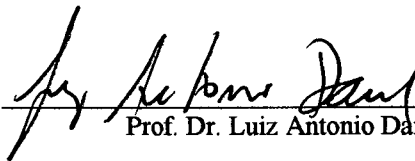
Prof. Dr. Masato Kobiyama



Prof. Dr. Antonio Cardoso Neto



Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rejane Helena Ribeiro da Costa  
(Coordenadora)



Prof. Dr. Luiz Antonio Daniel

FLORIANÓPOLIS , SC - BRASIL  
MAIO DE 1998

JORDEN, V.

**INVESTIGAÇÕES SOBRE A INFLUÊNCIA DA MARÉ EM CANAIS FLUVIAIS**

Florianópolis, /05/1998

xiii, 52 p., 27.9 cm figuras em cores, (CPGEA/UFSC, Msc., Engenharia Ambiental, 1998).

Dissertação – Universidade Federal de Santa Catarina

1. Canais fluviais. 2. Influências da maré. 3. Enchentes.

I. CPGEA/UFSC II. Título (série)

*À minha ilustre família, da qual tenho o prazer de honrar com o sobrenome. Aos meus pais em especial por representarem uma fonte inesgotável de amor, dedicação, confiança e acima de tudo inspiração. Aos meus ilustres irmãos a quem amo mais que tudo na vida e fazem jus à palavra irmão e aos seus descendentes que darão continuidade às suas e nossas aspirações.*

## AGRADECIMENTOS

Durante a elaboração e para elaboração deste trabalho recebi ajudas e conselhos de muitas pessoas e certamente alguns nomes serão esquecidos na tentativa de listá-los. Mas mesmo que venha a cometer injustiças não posso deixar de expressar meu agradecimento a algumas pessoas que contribuíram, cada uma a seu modo, para a realização deste trabalho.

Inicialmente agradeço ao meu ilustre orientador prof. Eloi Melo Filho por quem sem dúvida nenhuma tenho uma dívida eterna de gratidão. Além de amigo pessoal é um exemplo a ser seguido como símbolo de dedicação e afínco em prol da ciência. Solidário e participativo, sempre esteve presente me auxiliando e motivando durante todo o decorrer da minha dissertação. Em suma, uma fonte de inspiração na minha vida na busca por maiores conhecimentos.

Nunca poderia encontrar palavras para agradecer a minha tão amada família; pais (José Martins Jorden e Santa Antunes Jorden), irmãos (Edson M. Jorden e Joelson A. Jorden), cunhadas (Cássia C. R. Jorden e Noeli R. Jorden) e aos meus sobrinhos (Tchandara, Marco e Maickol e aos demais que Deus por ventura nos afortunar) que vieram complementar ainda mais a harmonia presente nessa família. A todos sou grato de coração pela confiança, amor e apoio em todos os sentidos que em nenhum momento me faltou.

Ao amigo Renato P. Martins e Antônio Cardoso Neto pelas incontáveis horas dedicadas com afínco, presteza e acima de tudo competência no meu aprendizado das técnicas de modelagem numérica utilizadas no presente trabalho.

Aos amigos, Eduardo Kushima, Fabiano Zago, Luiz A. Coelho, Ruy F. dos Santos e Gilmar Luiz Felix Dias que de modo direto ou indireto muito contribuíram no decorrer da minha vida pessoal e na elaboração desta tese.

Finalmente agradeço a UFSC-CPGEA-CAPES pela oportunidade e pelo financiamento de meus estudos.

## SUMÁRIO

|          |  |       |      |
|----------|--|-------|------|
|          | <b>LISTA DE FIGURAS</b>  | ..... | vii  |
|          | <b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>   | ..... | ix   |
|          | <b>RESUMO</b>  | ..... | xii  |
|          | <b>ABSTRACT</b>  | ..... | xiii |
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>  | ..... | 01   |
| <b>2</b> | <b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>  | ..... | 04   |
| 2.1      | Princípios básicos   | ..... | 04   |
| 2.2      | Dedução das equações de Saint-Venant a partir das equações de Reynolds                                       | ..... | 09   |
| 2.2.1    | Sistema natural de coordenadas   | ..... | 09   |
| 2.2.2    | Integração das equações de Reynolds na seção transversal   | ..... | 11   |
| <b>3</b> | <b>SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT-<br/>VENANT PARA DETERMINAÇÃO DOS<br/>EFEITOS DA MARÉ NUM CANAL FLUVIAL</b> | ..... | 16   |
| 3.1      | Solução de ordem (1): Escoamento Permanente Uniforme no rio  | ..... | 19   |
| 3.2      | Solução de ordem ( $\varepsilon$ )   | ..... | 19   |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS</b>  | ..... | 24   |
| 4.1      | Introdução   | ..... | 24   |
| 4.2      | Método Numérico  | ..... | 24   |
| 4.3      | Aplicações   | ..... | 27   |
| 4.3.1    | Aspectos gerais das soluções analítica e numérica  | ..... | 30   |
| 4.3.2    | Resposta da distância de penetração da maré à variações no período, na vazão e na declividade                | ..... | 41   |
| 4.4      | Solução não-permanente x solução permanente  | ..... | 45   |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>  | ..... | 49   |
| <b>6</b> | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>  | ..... | 51   |

## LISTA DE FIGURAS

|            |  |    |
|------------|--|----|
| Figura 2.1 | Vista esquemática em perspectiva do sistema de coordenadas “ <i>natural</i> ” adotado (notar que o eixo-x não é horizontal).....   | 10 |
| Figura 2.2 | Vista em corte da seção longitudinal do canal ( eixo-x e eixo-z).....  | 10 |
| Figura 3.1 | Representação esquemática do problema estudado (observe que x é <i>negativo</i> para montante).....  | 17 |
| Figura 4.1 | Representação esquemática da disposição do sistema de coordenadas utilizado nas equações de Águas Rasas.....   | 25 |
| Figura 4.2 | Esquema representativo do modelo numérico do canal.....  | 29 |
| Figura 4.3 | Alturas d'água fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes $t=0, 3, 6$ e $9$ h respectivamente, para um canal com<br>$h_o = 9.0$ m, $u_o = 1.49$ m/s, $S_o = 1:12000$ , $C_f = 54.6$ m <sup>1/2</sup> s <sup>-1</sup> , $T = 12$ h e<br>$\alpha_o = 0.3$ m .....        | 31 |
| Figura 4.4 | Velocidades da corrente fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes $t=0, 3, 6$ e $9$ h para um canal fluvial com<br>$h_o = 9.0$ m, $u_o = 1.49$ m/s, $S_o = 1:12000$ , $C_f = 54.6$ m <sup>1/2</sup> s <sup>-1</sup> , $T = 12$ h e<br>$\alpha_o = 0.3$ m.....         | 33 |
| Figura 4.5 | Alturas d'água fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes $t=0, 3, 6$ e $9$ h respectivamente, para um canal fluvial com<br>$h_o = 9.0$ m, $u_o = 1.49$ m/s, $S_o = 1:12000$ , $C_f = 54.6$ m <sup>1/2</sup> s <sup>-1</sup> , $T = 12$ h e<br>$\alpha_o = 3.0$ m..... | 36 |
| Figura 4.6 | Velocidades da corrente fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes $t=0, 3, 6$ e $9$ h para um canal fluvial com<br>$h_o = 9.0$ m, $u_o = 1.49$ m/s, $S_o = 1:12000$ , $C_f = 54.6$ m <sup>1/2</sup> s <sup>-1</sup> , $T = 12$ h e<br>$\alpha_o = 0.3$ m.....         | 38 |
| Figura 4.7 | Nível médio $\bar{h}(x)$ do rio para maré de grande amplitude.....   | 40 |
| Figura 4.8 | Distância de penetração da onda num canal fluvial com $\alpha_o = 0.3$ m,<br>$C_f = 54.6$ m <sup>1/2</sup> s <sup>-1</sup> , $q = 13.45$ m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> /m, $S_o = 1:12000$ e $30 \text{ min} < T < 72 \text{ h}$ . .....  | 41 |

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 4.9  | Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com<br>$\alpha_o = 0.3 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , $S_o = 1:12000$ , $T = 12 \text{ h}$ e<br>$7.5 < q < 26 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ .....   | 42 |
| Figura 4.10 | Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com<br>$\alpha_o = 0.3 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , $u_o = 1.49 \text{ m/s}$ , $T = 12 \text{ h}$ e $3 < h_o < 16 \text{ m}$ ...   | 43 |
| Figura 4.11 | Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com<br>$\alpha_o = 0.3 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , $h_o = 9 \text{ m}$ , $T = 12 \text{ h}$ e $0.5 < u_o < 3.3 \text{ m/s}$ ....  | 43 |
| Figura 4.12 | Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com<br>$\alpha_o = 0.3 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , $q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ , $T = 12 \text{ h}$ e<br>$0.0001 < S_o < 0.001 \text{ m/m}$ .....   | 44 |
| Figura 4.13 | Comparação da curva de remanso normalizada (aproximação<br>permanente) com os níveis d'água máximos previstos pela solução<br>não-permanente (numérica e analítica) para um canal com $h_o = 9.0 \text{ m}$ ,<br>$\alpha_o = 0.3 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , $q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ , $T = 12 \text{ h}$ e<br>$S_o = 1:12000$ ..... | 46 |
| Figura 4.14 | Comparação da curva de remanso normalizada (aproximação<br>permanente) com os níveis d'água máximos previstos pela solução<br>não-permanente (numérica e analítica) para um canal com $h_o = 9.0 \text{ m}$ ,<br>$\alpha_o = 3.0 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ , $q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ , $T = 12 \text{ h}$ e<br>$S_o = 1:12000$ ..... | 47 |
| Figura 4.15 | Comparação da curva de remanso dada pelo “Step-Method” com o<br>nível d'água máximo previsto pela solução analítica para $6 \text{ h} < T < 48 \text{ h}$<br>num canal fluvial com $h_o = 9.0 \text{ m}$ , $\alpha_o = 0.3 \text{ m}$ , $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,<br>$q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ , $T = 12 \text{ h}$ e $S_o = 1:12000$ .....       | 48 |



## LISTA DE SÍMBOLOS

### i) Símbolos Latinos

|              |  |
|--------------|--|
| $A$          | Área da seção transversal do canal.  |
| $a_o$        | Amplitude de oscilação da maré na foz.   |
| $B$          | Largura do canal.  |
| $b_o$        | Amplitude da oscilação da velocidade da corrente na foz provocada pela maré.                             |
| $C_f$        | Coeficiente de Chézy.  |
| $C_M$        | Velocidade de propagação da onda de maré rio acima   |
| $F$          | Força de arrasto turbulento.   |
| $F_r$        | Número de Froude.  |
| $F_x$        | Força por unidade de massa na direção-x devida, no caso de águas rasas, à tensão do vento na superfície. |
| $g$          | Aceleração da gravidade.   |
| $h_o$        | Altura d'água em regime permanente uniforme.   |
| $h_1(x)$     | Descreve a estrutura espacial da perturbação da altura d'água provocada pela maré.                       |
| $\bar{h}(x)$ | Nível médio do rio.  |
| $K$          | Coeficiente adimensional de atrito.  |
| $k$          | Parâmetro (complexo) da solução analítica.   |
| $k_r$        | Parte real de $k$ – que comanda a intensidade do amortecimento da maré.                                  |
| $k_i$        | Parte imaginária de $k$ - que governa a velocidade de propagação da onda de maré.                        |
| $L_C$        | Comprimento do canal considerado na simulação numérica.  |
| $O( )$       | Ordem de grandeza dos termos da expansão.  |
| $P$          | Campo de pressão instantâneo do escoamento.  |
| $p$          | Parte estável de pressão.  |
| $p'$         | Perturbações aleatórias na pressão.  |

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| $\overline{p'}$                   | Valor médio de $p'$ no tempo $\tau$ .  |
| $p_{atm}$                         | Pressão atmosférica.   |
| $P_m$                             | Perímetro molhado.   |
| $Q$                               | Vazão do canal.  |
| $q$                               | Vazão por unidade de largura.  |
| $Re\{ \}$                         | Representa a parte <i>Real</i> da função complexa.                             |
| $s$                               | Frequência da maré.  |
| $S_o$                             | Declividade do canal.  |
| $T$                               | Período da maré.   |
| $U$                               | Campo de velocidades instantâneo do escoamento.                                |
| $u$                               | Parte estável do escoamento (escoamento “médio”).                              |
| $\underline{u}_s$                 | Velocidade média na seção transversal do canal.                                |
| $u'$                              | Oscilações aleatórias do escoamento turbulento.                                |
| $\overline{u'}$                   | Valor médio de $u'$ no tempo $\tau$  |
| $u_o$                             | Velocidade média do escoamento em regime permanente uniforme.                  |
| $u_1(x)$                          | Descreve a estrutura espacial da perturbação da corrente provocadas pela maré. |
| $\underline{u}$ e $\underline{v}$ | Valores médios das velocidades na coluna d'água.                               |
| $z_f$                             | Cota do fundo do canal.  |
| $z_s$                             | Cota da superfície d'água.   |

## ii) Símbolos Gregos

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $\alpha_1$ e $\alpha_2$ | Coeficientes de correção devido à não-uniformidade do perfil de velocidade na coluna d'água.                 |
| $\alpha_3$              | Coeficiente de correção devido à não-uniformidade de distribuição lateral da velocidade na largura do canal. |
| $\varepsilon$           | Parâmetro de ordenamento da solução analítica.   |
| $\eta$                  | Posição da superfície livre da água.   |
| $\eta_1$ e $u_1$        | Perturbações de ordem $\varepsilon$ .  |
| $\nu$                   | Coeficiente de viscosidade cinemática.   |
| $\theta$                | Diferença de fase entre o nível d'água e a velocidade da corrente.   |
| $\theta$                | Ângulo formado entre o eixo longitudinal do canal e um plano de referência horizontal.                       |
| $\rho$                  | Massa específica do fluido.  |
| $\tau$                  | Período de tempo no qual as perturbações turbulentas têm média nula.   |
| $\bar{\tau}_f$          | Valor médio na largura do canal da tensão que o fundo do canal exerce sobre a água.                          |
| $\tau_{FUN}$            | Tensão média em todo o perímetro molhado do canal.   |
| $\tau_{ij}^{TURB}$      | Tensões tangenciais turbulentas.   |
| $\bar{\tau}_p$          | Valor médio na coluna d'água da tensão que as duas paredes do canal exercem sobre a água.                    |
| $\Delta x, \Delta y$    | Intervalos espaciais da malha, usada no modelo numérico.   |
| $\Delta t$              | Intervalo de tempo.  |

## RESUMO

O presente trabalho analisa os efeitos que as oscilações periódicas de nível d'água a jusante produzem no escoamento em um canal inclinado ou fluvial. Este problema retrata de forma simplificada a penetração da onda de maré num rio que deságua no mar.

O caso estudado considera um canal fluvial de geometria simples no qual as oscilações (maré) existentes na extremidade de jusante (foz) apenas perturba um escoamento permanente uniforme sub-crítico pré-existente. Para esta situação, são obtidas soluções não-permanentes das eqs. de Saint-Venant por : (i) um método analítico baseado na técnica de perturbações e (ii) um método numérico em diferenças finitas.

A solução não-permanente do problema indica que a oscilação de nível na foz da origem a uma onda longa que se propaga canal acima com forte atenuação e velocidade reduzida. A intensidade do amortecimento – quantificado por meio da distância de penetração da onda – em resposta à variações de período da onda e da vazão e declividade do canal é investigada. Finalmente, a precisão da aproximação permanente – na qual o efeito da maré é representado por uma simples curva de remanso – é avaliada por meio de comparação com a solução não-permanente obtida.

## ABSTRACT

This work investigates the effect that periodic oscillations of the downstream water level produce on the flow of an inclined or “fluvial” channel. This problem represents in a simple way the penetration of a tidal wave into a coastal river.

The case studied here considers a fluvial channel of simple geometry in which the (tidal) oscillations just perturb a pre-existing permanent uniform sub-critical flow. For such a situation, unsteady solution of the Saint-Venant equations are obtained by: (i) an analytical method based on a perturbation technique and (ii) a numerical method in finite-differences.

The unsteady solution of the problem shows that the downstream level oscillations give rise to a long wave that propagates upstream with strong attenuation and reduced speed. The intensity of this damping – quantified by means of the penetration distance of the wave – in response to variations of the wave period and of the slope and discharge of the channel is investigated. Finally, the precision of the steady state approximation – in which the effect of the tide is represented by a simple backwater curve – is evaluated by means of comparisons with the unsteady solution obtained.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Ao longo da enorme zona litorânea brasileira é grande o número de bacias hidrográficas cujos trechos finais incluem a região de encontro do rio com o oceano. Nesta região de transição – conhecida como estuário – as variações de densidade associadas à mistura da água doce drenada do continente com as águas salgadas do oceano dão origem a uma gama de fenômenos interessantes e peculiares que têm sido alvo de estudos específicos das ciências estuarinas (ver, por exemplo Officer, 1976). Do ponto de vista hidrodinâmico, os modelos estuarinos são usualmente construídos de modo a incluir as variações de densidade das águas sendo utilizados para, por exemplo, determinar o perfil de velocidades e a penetração da cunha salina no interior do estuário (Paiva, 1982). Nestes modelos, a participação do rio se resume à manutenção de uma vazão de água doce no limite superior da região considerada, a partir de onde se admite que um “regime fluvial” se estabeleça.

Entretanto, a classe de fenômenos hidrodinâmicos estuarinos influenciados pelas variações de densidade d'água não esgota as possibilidades das ações que o mar pode exercer sobre um rio. Um outro tipo de fenômeno importante – e que se constitui no tema do presente trabalho – diz respeito ao efeito que as oscilações de nível impostas pela maré na foz causam no escoamento do rio a montante. Com efeito, é um fato bem conhecido de todos que o nível médio do mar na costa varia continuamente. Na escala de tempo de interesse aqui – de (várias) horas a (poucos) dias – tal variação ocorre, principalmente, em resposta à : (a) forças de origem astronômica – de grande previsibilidade – e (b) ação do vento e da pressão atmosférica sobre o oceano – estas de caráter aleatório. No jargão da hidráulica marítima, a variação de nível médio associada ao fenômeno (a) é chamada de “*maré astronômica*” enquanto àquela associada ao fenômeno (b) é conhecida como “*maré meteorológica*”.

Ora, na parte superior da bacia hidrográfica, a experiência mostra que o escoamento no rio se processa – com exceção de eventos de cheias – em caráter *permanente* sob a ação contínua e direta da gravidade num regime puramente *fluvial*, onde a água simplesmente escoar *ladeira abaixo* (Melo F<sup>o</sup>, 1998). No trecho final da bacia (o qual pode conter o estuário mas não se restringe unicamente a ele), a hipótese de escoamento permanente não é mas razoável pois as variações de nível impostas pela maré a jusante dão origem *necessariamente* a um escoamento (fluvial) com características oscilatórias, portanto *não-permanentes*. Tal escoamento, na verdade, nada mais é do que a manifestação da *penetração* da onda de maré através do estuário até o interior do rio, fenômeno este passível de acontecer em qualquer rio que tenha conexão com o mar.

Analizando agora o problema sob o ponto de vista da Hidrologia, um dos principais temas de estudo desta ciência consiste na determinação das variações do nível d'água dos rios que ocorrem em resposta a episódios de chuvas sobre a bacia hidrográfica – assunto de fundamental importância na previsão de inundações de regiões ribeirinhas. Nos casos de rios cujas bacias hidrográficas incluem a região estuarina, o limite a jusante dos modelos hidrológicos é, em última análise, o mar. Apesar do nível médio marinho variar continuamente por ação da maré (astronômica e meteorológica), nos modelos utilizados em hidrologia o efeito dessas oscilações nos escoamentos fluviais usualmente: (i) ou não são considerados (ii) ou são incluídos de forma simplificada admitindo a existência de uma curva de remanso como se o escoamento se desse em regime permanente (Kovacs, 1988).

O presente trabalho tem por objetivo contribuir para um melhor entendimento dos efeitos que a maré provoca no escoamento do rio no trecho próximo à foz através do estudo de um caso simplificado da penetração da onda de maré num canal fluvial. O trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo II é feita uma revisão dos fundamentos teóricos necessários, seguido de uma dedução concisa das equações de Saint-Venant que formam a base fundamental da hidráulica de canais fluviais e que se constituem no ponto de partida para o estudo realizado nesse trabalho. O capítulo III

apresenta uma solução analítica das equações de Saint-Venant para determinar os efeitos da maré num canal fluvial. São apresentados, no capítulo IV, alguns resultados sobre a penetração da maré num rio obtidos pelo método analítico desenvolvido e por um método numérico aplicado para resolver numericamente as equações governantes.



## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

As equações de Saint-Venant formam a base fundamental da hidráulica de canais fluviais. Na literatura tradicional dessa área, a dedução dessas equações é feita de forma bastante simplificada na qual detalhes importantes são omitidos e várias aproximações feitas passam despercebidas. A maior deficiência dessa abordagem tradicional, conforme Melo *et al.*, 1998, talvez resida na aparente *desvinculação* do tópico hidráulica de canais dos conceitos básicos da moderna Mecânica dos Fluidos.

O presente capítulo pretende contribuir para o preenchimento dessa lacuna apresentando uma dedução concisa e objetiva das eqs. de Saint-Venant a partir das equações fundamentais da mecânica dos fluidos.

#### 2.1 Princípios básicos

De uma maneira geral, o escoamento incompressível de fluidos newtonianos é regido pelas eqs. da Continuidade e de Navier Stokes – que expressam os princípios da conservação da massa e do momentum. Em notação vetorial, essas equações se escrevem:

##### i) Equação da Continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

##### ii) Equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2)$$

onde,  $U$  e  $P$  representam, respectivamente, o campo de velocidades e o campo de pressão do escoamento,  $\rho$  é a massa específica do fluido;  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade cinemática e  $g$  a aceleração da gravidade.

Embora as eqs. da Continuidade e de Navier-Stokes descrevam precisamente os valores *instantâneos* de  $U$  e  $P$  num escoamento qualquer, é um fato bem conhecido na Mecânica dos Fluidos que escoamentos com altos números de Reynolds são propensos a instabilidades. Em vários casos, essas instabilidades introduzem perturbações que terminam por afetar todo o escoamento dando origem ao complexo fenômeno da *turbulência*. De modo geral, o caráter aleatório da turbulência inviabiliza a aplicação direta das eqs. (1) e (2) devendo estas serem adaptadas para o caso de escoamentos turbulentos conforme mostrado de forma simplificada a seguir. As novas equações resultantes dessa adaptação são as chamadas eqs. de Reynolds.

No caso dos canais tratados nesse trabalho, o campo de velocidades  $U$  pode ser interpretado como composto de uma parte *estável*  $u$  (escoamento “médio”) sobre a qual se superpõem oscilações “rápidas” e de caráter aleatório  $u'$  (turbulência). Assim tem-se que:

$$U = u + u' \quad (3)$$

Nesse tipo de escoamento turbulento, entretanto, as perturbações aleatórias da velocidade têm a seguinte característica:

$$\overline{u'} \equiv \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} u' dt = 0, \text{ para } t \text{ qualquer} \quad (4)$$

onde,  $\tau$  representa um período de tempo que é suficientemente longo para que as perturbações tenham média nula nesse intervalo mas que é ainda curto em relação às escalas de variação temporal do escoamento estável.

O campo de pressão apresenta, similarmente, o mesmo comportamento:

$$P = p + p' \quad (5)$$

$$\text{com } \overline{p'} = 0$$

O objetivo a se atingir a seguir é estabelecer equações que descrevam apenas a parte “média” estável dos escoamentos turbulentos. Para tanto, vamos tomar partido das características de  $u'$  e  $p'$  mencionadas acima e *promediar* as eqs. básicas (1) e (2) no tempo  $\tau$ .

Para efeito dessa dedução as eqs. (1) e (2) serão referenciadas a um sistema de coordenadas cartesiano (x,y,z) genérico não necessariamente horizontal-vertical. Na notação usada a seguir, a sobre-barra identifica a média no tempo  $\tau$ .

- Promediação da equação da Continuidade:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Analisando o 1º termo da equação (5), tem-se:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = \frac{\partial (\overline{u + u'})}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \quad (7)$$

$$\text{pois } \overline{u'} = 0, \quad \overline{u} = u$$

Procedendo analogamente para os outros 2 termos, chega-se ao seguinte resultado para a equação da continuidade promediada:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Ou seja, no caso da continuidade, o objetivo foi conseguido : uma equação que só envolve valores *médios* ( $u, v$  e  $w$ ) da velocidade do escoamento turbulento.

- Promediação da equação de Navier-Stokes:

Na direção  $x$ , tem-se:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + g_x + \nu \left[ \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \right] \quad (9)$$

Substituindo (3) e (5) em (9) e promediando cada um dos termos, como feito acima, tem-se;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial (\overline{u' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u' w'})}{\partial z} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + g_x + \nu \left[ \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Observe que, nesse caso, não foi possível obter uma equação envolvendo apenas as velocidades médias ( $u, v$  e  $w$ ) pois os termos  $(\overline{u' u'}, \overline{u' v'}, \overline{u' w'})$ , envolvendo produtos das perturbações e originários dos termos não-lineares de (9), não são necessariamente nulos.

A contribuição fundamental de Reynolds para resolver esse impasse consistiu em observar que  $\rho u' u', \rho u' v', \rho u' w'$  representam na verdade fluxos de momentum que são análogos a tensões (ex.  $(\rho u') v' =$  fluxo de momentum -  $x$  ( $\rho u'$ ) na dir -  $y$ ). Logo, passando os termos que envolvem produtos de oscilações de velocidades para o lado direito da eq. (10), é possível interpretar a turbulência como algo que dá origem a novas tensões internas que atuam sobre a parte estável do escoamento. Adotando essa interpretação, a equação de momentum na dir- $x$  promediada é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{TURB}}{\partial z} \right) \quad (11)$$

onde ,  $\tau_{xy}^{TURB} \equiv \overline{\rho u' v'}$ ;  $\tau_{xz}^{TURB} \equiv \overline{\rho u' w'}$  são as tensões tangenciais turbulentas de Reynolds.

Observe ainda que o termo  $\frac{\partial \tau_{xx}^{TURB}}{\partial x} \equiv \overline{\rho u' u'}$  foi incorporado ao gradiente de pressão e que as tensões devidas à viscosidade molecular do fluido não foram mais incluídas pois nos escoamentos turbulentos elas são totalmente sobrepujadas pelas tensões turbulentas que são tremendamente maiores.

Operando de forma análoga com as componentes y e z da eq. de Navier Stokes chega-se, finalmente às novas formas das equações da Continuidade e do Momentum adaptadas para uso em escoamentos *turbulentos* em canais.

-Continuidade :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

-Momentum :

$$\text{dir- x : } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (13)$$

$$\text{dir- y : } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{yx}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (14)$$

$$\text{dir- z : } \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{zx}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (15)$$

Se as tensões turbulentas puderem ser expressas em função da parte estável do campo de velocidades ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) do escoamento turbulento, o objetivo supracitado será também alcançado para as eqs. do momentum. As eqs. (13-15) são conhecidas como *Equações de Reynolds para Escoamentos Turbulentos*.

## **2.2 Dedução das equações de Saint-Venant a partir das equações de Reynolds**

### **2.2.1 Sistema natural de coordenadas**

O primeiro passo para se obter as equações de Saint-Venant, consiste em expressar as equações de Reynolds num sistema de coordenadas adequado a canais fluviais – conhecido como sistema *natural* de coordenadas – o qual toma partido direto da declividade do canal. Para tanto, a declividade existente em cursos d'água naturais será interpretada como o resultado da superposição de uma declividade de escala maior (macro-topografia) sobre a qual se sobrepõem variações de menor escala (micro-topografia) (Tayfur et al., 1993).

Assim, no sistema natural, o eixo-x (longitudinal) segue o eixo do canal acompanhando a sua macro-topografia sendo, portanto, inclinado de  $\theta$  em relação à horizontal; o eixo-y (transversal) é horizontal e o eixo-z é perpendicular ao plano x-y como ilustrado nas fig. 2.1 e 2.2.

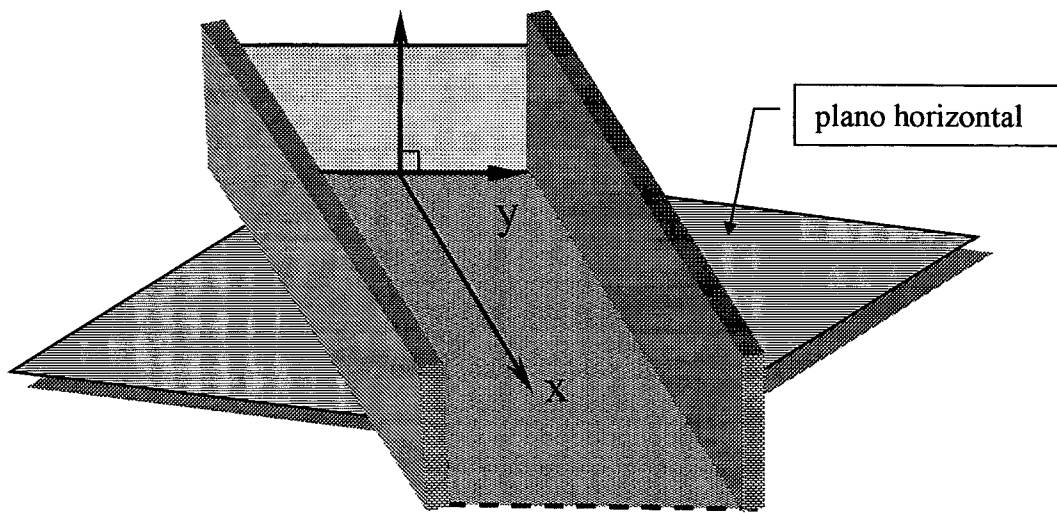


Figura 2.1 Vista esquemática em perspectiva do sistema de coordenadas “*natural*” adotado (notar que o eixo-x não é horizontal).

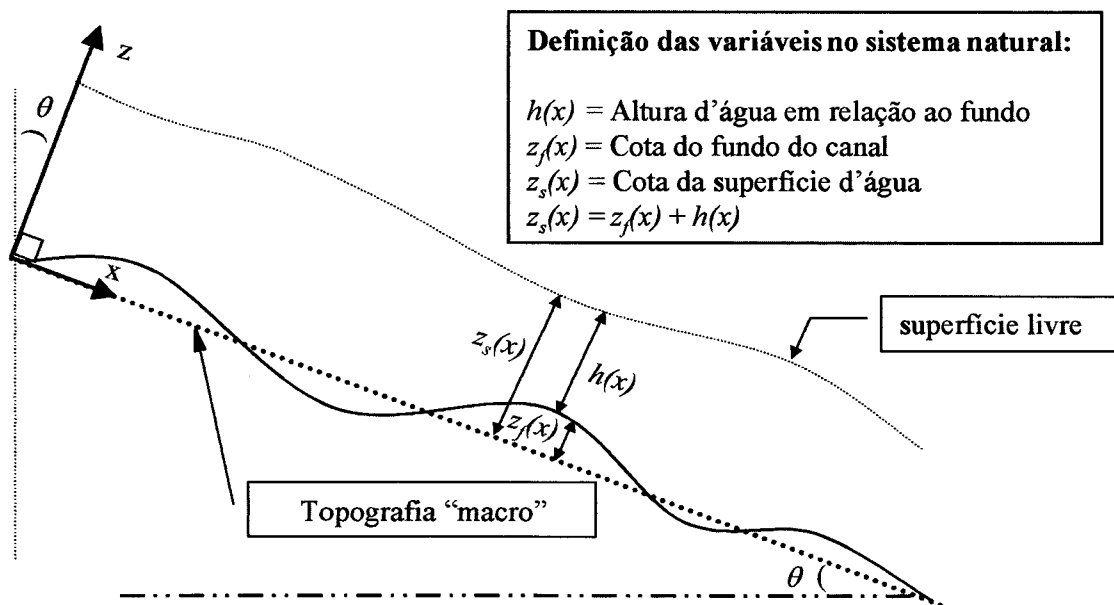


Figura 2.2 Vista em corte da seção longitudinal do canal (eixo-x e eixo-z).

As equações de Reynolds (13–15) expressas no sistema “*natural*” tomam a forma:

$$\text{dir- x: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (16)$$

$$\text{dir- y: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{yx}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (17)$$

$$\text{dir- z: } \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{zx}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (18)$$

### 2.2.2 Integração das equações de Reynolds na seção transversal

As equações unidimensionais de Saint-Venant são obtidas através da integração das equações tridimensionais de Reynolds na seção transversal do canal atendendo às condições de contorno inerentes ao problema.

A seguir é feita uma apresentação concisa das principais passagens envolvidas no processo.

- Condições de contorno

- A condição de contorno cinemática na superfície livre requer que uma partícula que esteja na superfície se mantenha lá. Considerando que a superfície d'água se mantenha horizontal na direção transversal (direção y) esta condição de contorno é expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u \frac{\partial z_s}{\partial x} = w \quad \text{em } z = z_s \quad \text{onde, } z_s \text{ representa a posição da superfície livre.}$$

- Desprezando-se, como de praxe, a ação do vento sobre a superfície das águas do canal, a condição dinâmica na superfície é dada por:

$$\left. \begin{array}{l} p = p_{atm} \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{em } z = z_s \quad \text{onde, } p_{atm} \text{ é a pressão atmosférica.}$$

- No fundo e nas paredes laterais, a condição de não-deslizamento requer que:



$$u=v=w=0 \quad \text{em } z=z_f \quad \text{e em } y=\pm \frac{B}{2}$$

onde,  $z_f$  é a cota do fundo do canal (diferente de zero apenas se houver micro-topografia) e B é a largura do canal.

- Integração da componente-z : Hipótese hidrostática

É conveniente iniciar a integração das equações de Reynolds pela dir-z tomando partido de uma característica básica dos escoamentos em canais fluviais. Nessa direção, as acelerações presentes são muito menores que a aceleração da gravidade, havendo um equilíbrio quase exato entre o peso do fluido e o gradiente de pressão. Assim sendo, a eq. (18) se reduz simplesmente a:

$$\frac{\partial p}{\partial z} \cong \rho g \cos \theta \quad (19)$$

cuja integração permite determinar o campo de pressão diretamente a partir da elevação da superfície livre da água:

$$p = \rho g \cos \theta (z_s - z_f) + p_{atm} \quad (20)$$

- Integração da componente-x :

A integração da componente-x da equação de Reynolds é feita a partir de uma forma alternativa da equação de momentum também conhecida como forma “conservativa” obtida usando a equação da continuidade como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{TURB}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Rescrevendo (8), tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -g \cos \theta \frac{\partial z_s}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}^{TURB}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{TURB}}{\partial z} \right] \quad (22)$$

A integração de (22) ao longo da coluna d'água (dir-z) é feita usando as condições de contorno apresentadas acima e a chamada *Regra de Leibnitz* para derivação de integrais com limites variáveis (Dean e Dalrymple, 1984).

O resultado dessa operação é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 h \bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_2 h \bar{u} \bar{v})}{\partial y} = \\ -g \cos \theta \frac{\partial z_s}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_f}^{z_s} \tau_{xy}^{TURB} dz - \frac{1}{\rho} \tau_f \end{aligned} \quad (23)$$

onde,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  são valores médios da velocidade na coluna d'água;  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são correções introduzidas pelo fato de o valor médio do produto de duas variáveis não ser igual ao produto dos valores médios dessas variáveis e que dependem da forma do perfil de velocidades;  $\tau_f$  é a tensão (turbulenta) que o fundo do canal exerce sobre a água.

Nota-se que, como os perfis de velocidades não são conhecidos o procedimento usualmente adotado em hidráulica de canais é considerar os coeficientes  $\alpha \cong 1.0$  o que equivale a admitir um perfil aproximadamente uniforme na dir-z.

Para se obter a forma integrada na seção do canal é necessário agora fazer a integração de (23) na direção transversal (dir-y). O resultado é:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_3 \frac{Q^2}{A} \right) = -g A \cos \theta \frac{\partial z_s}{\partial x} + g A \sin \theta - \left[ \bar{\tau}_f B + 2 \bar{\tau}_p h \right] \frac{1}{\rho} \quad (24)$$

onde,  $A$  é a área da seção transversal;  $Q = A\bar{u}_s$  é a vazão no canal com  $\bar{u}_s$  = velocidade média na seção;  $\alpha_3$  é um coeficiente de correção similar aos anteriores que surge devido à não-uniformidade da distribuição lateral da velocidade média na coluna d'água ( $\bar{u}$ );  $\bar{\tau}_f$  é o valor médio na largura do canal das tensões (turbulentas) que o fundo exerce sobre a água e  $\bar{\tau}_p$  é o valor médio na coluna d'água das tensões que as duas paredes laterais exercem sobre a água do canal. Como no caso anterior, não é possível determinar  $\alpha_3$  sem conhecer o perfil lateral de velocidade e, por isso, em hidráulica de canais admite-se que  $\alpha_3 \cong 1$ .

As forças de resistência ao escoamento devido ao “*atrito*” da água com as paredes e com o fundo são sempre representados de forma *global* através de uma única tensão média ( $\tau_{FUN}$ ) em todo o perímetro molhado ( $P_m$ ) do canal. Assim, definido  $\tau_{FUN} P_m \equiv \bar{\tau}_f B + 2\bar{\tau}_p h$ , chega-se à seguinte forma para a componente-x da equação de Reynolds integrada na seção do canal:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = -gA \cos \theta \frac{\partial z_z}{\partial x} + gA \sin \theta - \frac{\tau_{FUN} P_m}{\rho} \quad (25)$$

Para “*fechar*” a equação é necessário expressar  $\tau_{FUN}$  em função do próprio escoamento. Em hidráulica de canais, o *fechamento* é alcançado através da utilização de resultados empíricos baseados numa *parametrização* da força de arraste turbulenta do tipo  $F = \rho K u |u|$ . Usando esse princípio para as forças de resistência no canal, tem-se:

$$\tau_{FUN} = \rho \frac{K Q |Q|}{A^2}$$

onde,  $K$  é um coeficiente (adimensional) de proporcionalidade que, idealmente, depende apenas das características do fundo e paredes do canal.

As duas parametrizações mais utilizadas em hidráulica de canais são a de Manning e a de Chézy, amplamente encontradas na literatura. No presente trabalho, optou-se pela parametrização de Chézy segundo a qual:

$$K = \frac{g}{C_f^2}, \text{ onde, } C_f \text{ é o coeficiente de Chézy.}$$

A equação de momentum de Saint-Venant é finalmente obtida introduzindo-se a chamada aproximação do *pequeno declive* (Morris, 1979) que consiste em considerar distâncias na dir-x iguais à distâncias horizontais em vista da pequenez dos declives normalmente encontrados em cursos d'água naturais (da ordem de 1:1000 m/m ou menor). Segundo esta aproximação tem-se que:  $\cos\theta \approx 1.0$  e  $\sin\theta \approx \tan\theta \approx S_o$  = declividade do canal (expressa na forma usual em m/m).

Portanto, a eq. momentum de Saint-Venant escrita em função da vazão toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = -gA \frac{\partial z_z}{\partial x} + gAS_o - \frac{g}{C_f^2} \frac{Q|Q|P_m}{A^2} \quad (26)$$

A outra equação básica – a da conservação da massa – é obtida de forma análoga através da integração na seção transversal de equação tridimensional da continuidade (12). Tal integração faz uso também das condições de contorno e da regra de Leibnitz já mencionada anteriormente (Dean e Dalrymple, 1984). O resultado é:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

O par de equações (26) e (27) formam a base fundamental da hidráulica de canais fluviais e será o ponto de partida para o estudo da influência da maré em rios apresentados na sequência do trabalho.

### CAPÍTULO III

## SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT PARA DETERMINAÇÃO DOS EFEITOS DA MARÉ NUM CANAL FLUVIAL

Num caso real, a penetração da onda de maré rio acima a partir da foz é um problema de grande complexidade. O presente trabalho tem como objetivo contribuir para um melhor entendimento desse fenômeno através da análise de um caso *idealizado* que permita simplificar ao máximo o problema mas que mantenha ainda suas propriedades essenciais. O material que segue é uma versão modificada e aperfeiçoada do trabalho de Godin (1985). Uma versão expandida dessa teoria poderá também ser encontrada em Melo (1998).

Assim sendo, a situação idealizada a ser analisada neste trabalho deve atender às seguintes hipóteses simplificadoras:

- (i) O rio é um canal fluvial “*largo*” (no sentido que a largura  $\gg$  altura d’água); com declividade e largura *constantes* de montante até a foz e com micro-topografia desprezível (i.e.  $z_f = 0 \Rightarrow z_s = h$ ) – ver fig. 2.2.
- (ii) A maré provoca perturbações numa situação de equilíbrio dada pelo escoamento *permanente uniforme sub-crítico* no rio. Tais perturbações devem ser pequenas o suficiente de forma a provocar apenas variações na velocidade da corrente sem, no entanto, ocasionar *inversão de fluxo* no canal.
- (iii) A maré é representada de forma simplificada por uma única componente harmônica no tempo com período T capaz de se propagar rio acima *sem sofrer reflexão*.

A figura abaixo ilustra graficamente a situação:

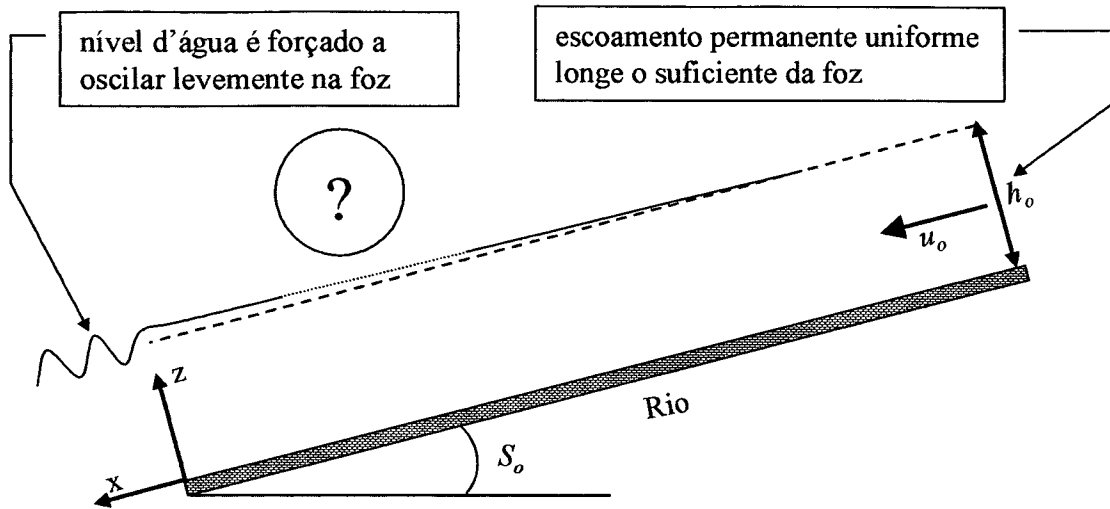


Figura 3.1 Representação esquemática do problema estudado (observe que  $x$  é negativo para montante).

A hipótese (i) permite rescrever as equações de conservação da massa e do momentum de Saint-Venant (27) e (26) da seguinte forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}_s)}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} + \bar{u}_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x} = gS_o - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{K\bar{u}_s^2}{h} \quad (29)$$

Para efeito de simplificação, de notação a partir de agora  $\bar{u}_s$  (velocidade média na seção) será expressa simplesmente pela letra  $u$ .

Para resolver o sistema de equações acima, será empregada uma técnica de solução por perturbação muito utilizada na resolução de sistemas de equações diferenciais não-lineares. De acordo com essa técnica, supõe-se que a solução completa possa ser representada por uma superposição de soluções parciais expressa na forma de uma série ordenada em termos de um pequeno parâmetro ( $\varepsilon$ ). A idéia básica da técnica consiste em utilizar esta expansão para transformar as equações diferenciais não-lineares originais num conjunto ordenado de equações diferenciais lineares de solução mais simples.

Assim, vamos admitir que a altura d'água  $[h(x,t)]$  e a velocidade da corrente  $[u(x,t)]$  do rio sob o efeito da maré possam ser expressas da seguinte forma:

$$h(x,t) = h_o + O(\varepsilon)\eta_1(x,t) + O(\varepsilon^2) \quad (30)$$

$$u(x,t) = u_o + O(\varepsilon)u_1(x,t) + O(\varepsilon^2) \quad (31)$$

onde,  $h_o$  e  $u_o$  são, respectivamente, a altura d'água e a velocidade média do escoamento em regime permanente uniforme;  $\eta_1$  e  $u_1$  são perturbações de ordem  $\varepsilon$ , com  $\varepsilon$  sendo o parâmetro de ordenamento da solução o qual explicita a ordem de grandeza  $[O(\varepsilon^n)]$  dos termos da expansão. [Observe, por exemplo, que o significado de:  $u_n / u_o = O(\varepsilon^n)$  é o de que  $u_n$  é de magnitude  $(\varepsilon^n)$  vezes menor que  $u_o$  e assim sucessivamente. Note ainda que  $\varepsilon < 1$  em vista da hipótese (ii)]

Substituindo as expansões (30) e (31) nas eqs. de Saint-Venant e, a partir de agora, omitindo o símbolo  $O$  para simplificar a notação, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}[h_o + (\varepsilon)\eta_1] + \frac{\partial}{\partial x}\{[h_o + (\varepsilon)\eta_1][u_o + (\varepsilon)u_1]\} = O(\varepsilon^2) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[u_o + (\varepsilon)u_1] + [u_o + (\varepsilon)u_1]\frac{\partial}{\partial x}[u_o + (\varepsilon)u_1] = gS_o - \\ g\frac{\partial}{\partial x}[h_o + (\varepsilon)\eta_1] - \frac{K}{h_o}\left[1 - (\varepsilon)\frac{\eta_1}{h_o}\right][u_o + (\varepsilon)u_1]^2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (33)$$

onde, uma expansão binomial do tipo  $(1 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$ , para  $\alpha < 1$ , foi usada no termo de atrito.

As equações (32) e (33) formam a base para a obtenção do conjunto de equações lineares desejado, bastando para isso agrupar os termos de acordo com suas ordens de magnitude medidas por  $(\varepsilon)$ .

### 3.1 Solução de ordem (1): Escoamento Permanente Uniforme no rio

A primeira aproximação para o problema vem das equações de primeira ordem:

$$O(1): \quad \frac{\partial(h_o u_o)}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$S_o - \frac{u_o^2}{C_f^2 h_o} = 0 \quad (35)$$

cuja solução, conforme se previa, corresponde a um simples escoamento permanente uniforme, no qual  $u_o$  e  $h_o$  têm valores constantes dados por:

$$h_o = \left( \frac{q}{C_f S_o^{1/2}} \right)^{2/3} \quad (36)$$

$$u_o = \frac{q}{h_o} \quad (37)$$

onde,  $q$  = vazão por unidade de largura (constante) transportada em regime permanente uniforme pelo rio de declividade  $S_o$  (ambos dados do problema).

### 3.2 Solução de Ordem ( $\varepsilon$ ) : Efeito da Maré

O primeiro efeito da maré se manifesta em  $O(\varepsilon)$  sendo obtido da solução das seguintes equações obtidas de (32) e (33):

$$O(\varepsilon) : \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + h_o \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_o \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_o \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{K u_o^2 \eta_1}{h_o^2} + \frac{2 K u_o u_1}{h_o} = 0 \quad (39)$$



Para encontrar tal solução, os seguintes passos são dados. Supondo inicialmente que as dependências espacial e temporal da solução possam ser separadas e observando-se que a hipótese (iii) requer funções periódicas no tempo, as seguintes formas para  $\eta_1$  e  $u_1$  são admitidas como válidas:

$$\eta_1(x,t) = \text{Re}\{h_1(x)e^{ist}\} \quad (40)$$

$$u_1(x,t) = \text{Re}\{u_1(x)e^{ist}\} \quad (41)$$

onde, o símbolo  $\text{Re}\{ \}$  representa a parte *Real* da função complexa que segue;  $s = 2\pi/T$  corresponde à frequência da maré,  $T$  o seu período e  $h_1(x)$  e  $u_1(x)$  são as funções que descrevem a estrutura espacial da perturbação da altura d'água e da corrente provocadas pela maré. Note que este procedimento permite eliminar as derivadas temporais das eqs. já que  $\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = is\eta_1$  e  $\frac{\partial u_1}{\partial t} = isu_1$ .

Explicitando-se a seguir o valor de  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$  em (38) tem-se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{is}{h_o}\eta_1 - \frac{u_o}{h_o}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \quad (42)$$

Substituindo-se este resultado em (38), tem-se:

$$\left(is + \frac{2Ku_o}{h_o}\right)u_1 + \left(g - \frac{u_o^2}{h_o}\right)\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \left(\frac{isu_o}{h_o} + \frac{Ku_o^2}{h_o^2}\right)\eta_1 = 0 \quad (43)$$

A expressão acima ainda possui um termo em  $u_1$  o qual, entretanto, pode ser eliminado fazendo a derivada em relação a  $x$  e substituindo-se novamente a expressão (42) para o termo  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ . Fatorando-se a função temporal, chega-se à seguinte equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes para  $h_1(x)$  :

$$\left(g - \frac{u_o^2}{h_o}\right) \frac{d^2 h_1}{dx^2} - \left(\frac{3Ku_o^2}{h_o^2} + i \frac{2su_o}{h_o}\right) \frac{dh_1}{dx} + \left(\frac{s^2}{h_o} - i \frac{2sKu_o}{h_o^2}\right) h_1 = 0 \quad (44)$$

A solução dessa equação que atende à condição imposta pela hipótese (iii) - isto é, uma onda progressiva que se atenua ao avançar rio acima a partir da foz (logo com  $x < 0$ ) - é:  $h_1(x) = a_o e^{kx}$ , onde  $a_o$  é uma constante a ser especificada. Substituindo-se esta função exponencial em lugar de  $h_1(x)$  na eq.(40) obtém-se uma equação algébrica de segundo grau para o número *complexo*  $k$ , cuja solução é :

$$k = k_r + ik_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (45)$$

onde,  $A = gh_o(1 - Fr^2)$ ;  $B = -u_o \left( \frac{3Ku_o}{h_o} + i2s \right)$  e  $C = s \left( s - i \frac{2Ku_o}{h_o} \right)$  são constantes conhecidas.

Nota-se o aparecimento do Número de Froude ( $F_r$ ) relativo ao escoamento não perturbado,  $F_r = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}}$ , na constante ( $A$ ) indicando que a solução acima não se aplica quando o escoamento básico se dá em regime crítico. Observa-se também que o sinal da raiz deve ser escolhido de forma a ter  $k$  no primeiro quadrante do plano complexo em vista da hipótese (iii).

Portanto, a solução do problema de  $O(\varepsilon)$  para o nível d'água é:

$$\eta_1(x, t) = \text{Re}\{a_o e^{kx + ist}\} = \text{Re}\{(a_o e^{k_r x}) e^{i(k_i x + st)}\} = (a_o e^{k_r x}) \cos(k_i x + st) \quad (46)$$

Sendo  $k_r$  e  $k_i$  dados por (45) e a constante  $a_o$  acima é a amplitude de oscilação da maré na foz. Observando que o parâmetro de ordenamento  $\varepsilon$  corresponde

à ordem de magnitude da solução  $\eta_1$  em relação a  $h_o$ , verifica-se que  $\varepsilon = \frac{a_o}{h_o} < 1$ , de acordo com a hipótese (ii).

Analisando a solução (46), observa-se que,  $k_r$  ( a parte real do parâmetro  $k$  ) comanda a *intensidade do amortecimento* da maré no interior do rio enquanto  $k_i$  ( a parte imaginária do parâmetro  $k$  ) governa a *velocidade de propagação* da onda de maré ( $C_M$ ) rio acima uma vez que:

$$C_M = \frac{L}{T} = \frac{s}{k_i} \quad (47)$$

A variação da velocidade da corrente do rio provocada pela maré ( $u_1$ ) pode ser obtida usando-se a solução (46) na eq. de conservação da massa (42) fazendo também uso da expressão (41). O resultado é:

$$u_1(x, t) = (b_o e^{k_r x}) \text{Re} \left\{ e^{i(k_i x + st + \theta)} \right\} = (b_o e^{k_r x}) \cos(k_i x + st + \theta) \quad (48)$$

onde,  $b_o$  representa a amplitude da oscilação da velocidade da corrente na foz causada pela maré e  $\theta$  a diferença de fase entre o nível d'água e a velocidade da corrente, dados por:

$$b_o = -u_o \left( D \frac{a_o}{h_o} \right) \quad (49)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{sk_r}{u_o k^2 + sk_i} \right) \quad (50)$$

$$\text{com, } D = \left[ \sqrt{1 + \frac{2sk_i}{u_o k^2} + \frac{s^2}{u_o^2 k^2}} \right] \text{ e } k^2 = k_r^2 + k_i^2. \quad (51)$$

Como uma breve verificação da consistência desse resultado, pode-se analisar um caso limite onde  $S_o = 0$ , no qual o canal fluvial se torna um canal de maré (Melo

F<sup>o</sup>, 1998) e, portanto, a velocidade permanente do canal se anula ( $u_o=0$ ). Para simplificar ao máximo, o atrito será também desprezado ( $K=0$ ).

As soluções das equações (44) e (46) simplificam-se, nesse caso, para:

$$\eta_1(x,t) = a_o \cos k_i(x + \sqrt{gh_o}t) \quad (52)$$

$$u_1(x,t) = -\sqrt{gh_o} \left( \frac{a_o}{h_o} \right) \cos k_i(x + \sqrt{gh_o}t) \quad (53)$$

reproduzindo assim, a solução para uma onda longa progressiva de pequena amplitude num canal de maré (Melo F<sup>o</sup>, 1998).

Com isso, conclui-se a solução analítica do problema.

## **CAPÍTULO IV**

### **RESULTADOS**

#### **4.1 Introdução**

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados sobre o efeito da maré no escoamento de um canal fluvial. Idealmente, a melhor maneira de se testar resultados teóricos é através da sua comparação com dados experimentais. Infelizmente, não foi possível encontrar na literatura nem experimentos de laboratórios nem medições de campo detalhadas o suficiente para uma verificação da solução analítica encontrada.

Assim sendo, optou-se por um procedimento alternativo de avaliação: resolver as equações governantes numericamente e comparar os resultados das soluções numérica e analítica. Esta alternativa, na verdade, se mostrou atrativa pois, caso os resultados sejam favoráveis, será possível contar com o auxílio de um método numérico – bem menos restritivo que o analítico – para futuras aplicações a casos práticos reais. É feita a seguir uma breve descrição do método numérico empregado.

#### **4.2 Método Numérico**

A solução numérica das equações de Saint-Venant (26) e (27) foi obtida por meio de uma adaptação do modelo bidimensional em planta desenvolvido por Martins (1992) para solução das chamadas equações de “Águas Rasas”, utilizadas em Engenharia Costeira para descrever o escoamento em corpos d’água rasos como baías, estuários e canais de maré.

De acordo com Melo F<sup>o</sup> (1998), as equações de Águas Rasas ( versão unidimensional ) e as equações de Saint-Venant guardam uma grande similaridade entre si. Ambas têm como base fundamental a hipótese do campo de pressão

hidrostático no escoamento, residindo a diferença apenas na disposição dos eixos coordenados utilizados por uma e por outra: nas equações de Saint-Venant, conforme já visto, o eixo-x é *inclinado* de  $S_o$  em relação à horizontal enquanto que nas equações de Águas Rasas o eixo-x é *efetivamente horizontal*. Este fato, segundo Melo et al (1998), reflete os tipos de escoamento que cada equação objetiva descrever: Saint-Venant ( escoamentos “fluviais” impulsionados primordialmente pela gravidade ) e Águas Rasas ( escoamentos “de maré” impulsionados primordialmente por gradientes de pressão oriundos da presença de ondas longas).

A versão 1-D das equações de Águas Rasas utilizadas por Martins (1992), excluídos os termos relativos à força de Coriolis e para um canal de largura constante, são:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{gu|u|}{C_f^2 h} + F_x \quad (55)$$

onde,  $z$  é vertical,  $x$  é horizontal e situado no nível médio de repouso da água;  $\eta$  é a posição da superfície livre da água;  $h = -h_o + \eta$  com  $h_o$  =profundidade local conforme ilustrado na fig. 4.1.  $F_x$  é a força por unidade de massa na direção- $x$  devida, no caso de Águas Rasas, à tensão do vento na superfície.

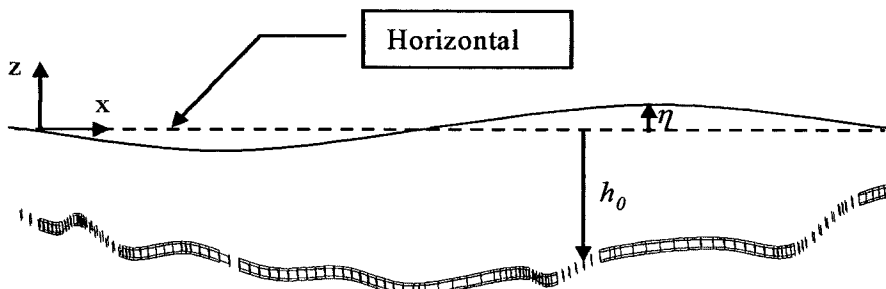


Figura 4.1 Representação esquemática da disposição do sistema de coordenadas utilizado nas equações de Águas Rasas.

Comparando as eqs. (55) e (29), verifica-se que para transformar as equações de Águas Rasas nas equações de Saint-Venant basta interpretar a força  $F_x$  como sendo a projeção do peso por unidade de massa na dir-x que passa a ser inclinada em relação à horizontal. Assim, fazendo  $F_x = g S_o$  em (55) e tomando o devido cuidado na posição do eixo-z, as equações de Águas Rasas se transformam nas equações de Saint-Venant. Este procedimento permitiu utilizar *diretamente* o modelo numérico de Martins(1992) no problema em questão sem *qualquer* modificação no código original.

O contorno do domínio fluido no modelo de Martins (1992) pode ser do tipo “fechado” - representando a fronteira física entre terra e água - ou “aberto” - uma fronteira fictícia entre água e água necessária para restringir o domínio de estudo a uma região de interesse. No contorno fechado duas condições precisam ser satisfeitas. A primeira delas requer velocidades perpendiculares ao contorno nulas. A segunda se refere à componente paralela ao contorno que pode ter deslizamento total ou nenhum deslizamento.

Quanto ao contorno aberto é necessário especificar a velocidade da corrente *ou* as elevações da superfície d’água. Na opção de velocidades, deve-se conhecer o comportamento das velocidades perpendiculares ao contorno durante todo o tempo que se pretende estudar o escoamento do fluido. Na opção de elevações faz-se necessário especificar a variação temporal do nível d’água na fronteira aberta. Observe que o modelo *não* permite a especificação *simultânea* de nível e velocidade numa mesma fronteira aberta.

O esquema numérico utilizado no modelo de Martins (1992) é do tipo semi-implícito em diferenças finitas com malha desencontrada. Na discretização espacial e temporal utiliza-se um método conhecido como ADI (*Alternate Direct Implicit*), através do qual o cálculo das incógnitas no tempo  $t + \Delta t$  a partir dos valores conhecidos no instante  $t$  é feito em 2 estágios de tempo. No primeiro estágio

$(t \rightarrow t + \frac{\Delta t}{2})$  as equações são discretizadas implicitamente em uma direção e explicitamente na outra, obtendo-se assim um sistema tridiagonal na direção que foi esquematizada implicitamente. Conhecidos os valores das variáveis no tempo  $t \rightarrow t + \frac{\Delta t}{2}$ , as equações no segundo estágio  $(t + \frac{\Delta t}{2} \rightarrow t + \Delta t)$  são discretizadas de maneira inversa, ou seja, a direção que era implícita passa a ser explícita e vice-versa. Desta maneira o esquema ADI permite resolver o sistema que originalmente era bidimensional através de dois sistemas unidimensionais. Este esquema numérico sofre algumas restrições quanto ao número de Courant quando comparados aos esquemas totalmente implícitos, pois imprecisões podem surgir para números de Courant maiores que cinco (Abbot e Basco, 1989). Um detalhamento completo do esquema numérico do modelo de Martins (1992) pode ser encontrado na trabalho original.

Finalmente, convém ressaltar que a analogia entre as equações de Águas Rasas e Saint-Venant, que serviu de base para a adaptação descrita, se aplica a escoamentos fluviais que ocorram exclusivamente em regime sub-crítico. Escoamentos com mudanças de regime (sub-críticos para super-crítico e vice-versa) com a correspondente (possível) presença de ressaltos hidráulicos requerem tratamento numérico especial, não podendo ser modelados pelo esquema usado por Martins (1992). O caso de interesse nesse trabalho, no entanto, é o de escoamentos fluviais *sub-críticos*.

### 4.3 Aplicações

Nesta seção são apresentadas e comparadas as soluções analítica e numérica obtidas para a penetração da maré num canal fluvial idealizado, com as seguintes características:

|         |   |       |                     |
|---------|---|-------|---------------------|
| Canal : | $q=13.46 \text{ m}^3\text{s}^{-1}/\text{m}$ | Maré: | $T=12 \text{ h}$    |
|         | $S_o=1:12000$                               |       | $a_o=0.3 \text{ m}$ |
|         | $C_f=54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$   |       |                     |



As características do canal e da maré foram inspiradas na situação existente no trecho final do rio Itajaí-Açu em Santa Catarina.

Substituindo-se esses valores nas expressões (36) - para  $h_o$ , (37) - para  $u_o$  e (45) - que determina  $k$  - obtém-se os quatro parâmetros que determinam completamente a solução analítica:

$$h_o = 9.0 \text{ m}$$

$$u_o = 1.49 \text{ m/s}$$

$$k_r = 4.48 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

$$k_i = 3.39 \times 10^{-5} \text{ rad/m.}$$

Note que a determinação de  $k$  por (45) envolve a extração de uma raiz complexa a qual, no entanto, não apresenta maiores problemas podendo ser calculada diretamente através de rotinas disponíveis em planilhas eletrônicas ou com funções específicas existentes em linguagens de programação ( ex. Função CSQRT em FORTRAN).

Para obtenção da solução numérica, torna-se necessário especificar criteriosamente as condições de contorno e iniciais do problema. No presente caso foram utilizados:

(i) Condições iniciais

$$\left. \begin{array}{l} h(x,0) = h_o = 9.0 \text{ m} \\ u(x,0) = u_o = 1.49 \text{ m/s} \end{array} \right\} \text{ para todo } x$$

(ii) Condições de contorno

- No contorno de montante, a altura d'água  $h_o$  é mantida *constante* todo o tempo:

$h(-L_c, t) = h_o$ , para todo  $t$  e onde  $L_c$  representa o comprimento total do canal.

No contorno de jusante, o nível d'água é forçado a oscilar em torno de  $h_o$  da seguinte forma:

$h(0, t) = h_o + a_o \sin(st)$ , sendo  $a_o$  a amplitude da maré na foz do rio.

A velocidade  $u$  não é especificada nos contornos, mas sai da própria solução numérica.

O passo de tempo adotado obedeceu ao critério de Courant, com um  $\Delta t = 250$  s. A malha utilizada no modelo numérico tem 500 pontos em  $x$  com  $\Delta x = 520$  m totalizando um comprimento  $L_c = 260$  km e 1 ponto em  $y$  com  $\Delta y = 200$  m conforme fig. 4.2. O período total de simulação foi de 24 h, correspondendo a dois ciclos de maré ( $T = 12$  h). O tempo de simulação numa DEC série 800 foi de 5 min e num Pentium 133MHz de 3 h.

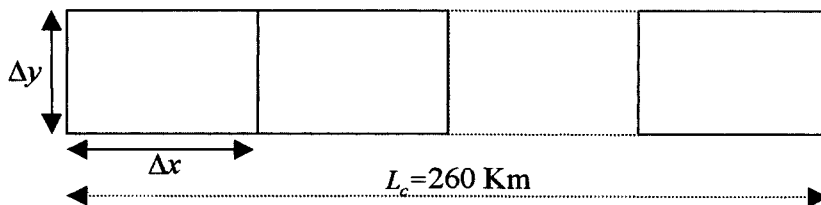


Figura 4.2 Esquema representativo do modelo numérico do canal.

Um ponto que se mostrou crucial para a implementação com sucesso do modelo numérico diz respeito ao comprimento total do canal ( $L_c$ ) que tem que ser grande o bastante para garantir uma total atenuação da maré antes do término do canal. Nas simulações onde  $L_c$  não foi suficientemente grande a onda de maré proveniente da foz atingiu o limite de montante sendo refletida de volta para o domínio de cálculo não permitindo que a solução numérica entrasse em regime cíclico

no qual a solução se repete sem alteração. Com  $L_c$  grande o suficiente esse tipo de problema não se apresentou.

#### **4.3.1 Aspectos gerais das soluções analítica e numérica**

As figuras 4.3 e 4.4 mostram as soluções analítica e numérica para o nível d'água e a velocidade da corrente, respectivamente em quatro instantes de tempo: 0 h, 3 h, 6 h e 9 h, para uma “maré” com período  $T=12$  h e amplitude  $\alpha_o=0.3$  m (que corresponde a  $\varepsilon=0.03$  portanto, atendendo à restrição de  $\varepsilon \ll 1$  imposta pelo modelo analítico). Como se pode observar, ambas as soluções mostram excelente concordância nesse caso.

Figura 4.3 Alturas d'água fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes  $t = 0, 3, 6$  e  $9$  h respectivamente, para um canal com  $h_o = 9.0$  m,  $u_o = 1.49$  m/s,  $S_o = 1:12000$ ,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 12$  h e  $\alpha_o = 0.3$  m.

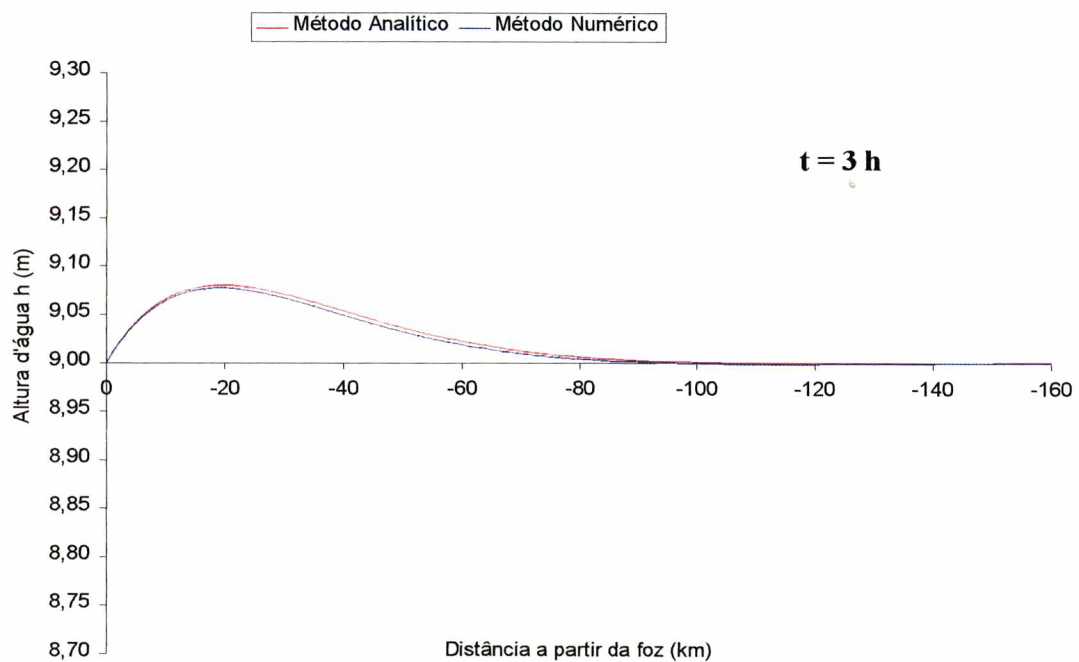
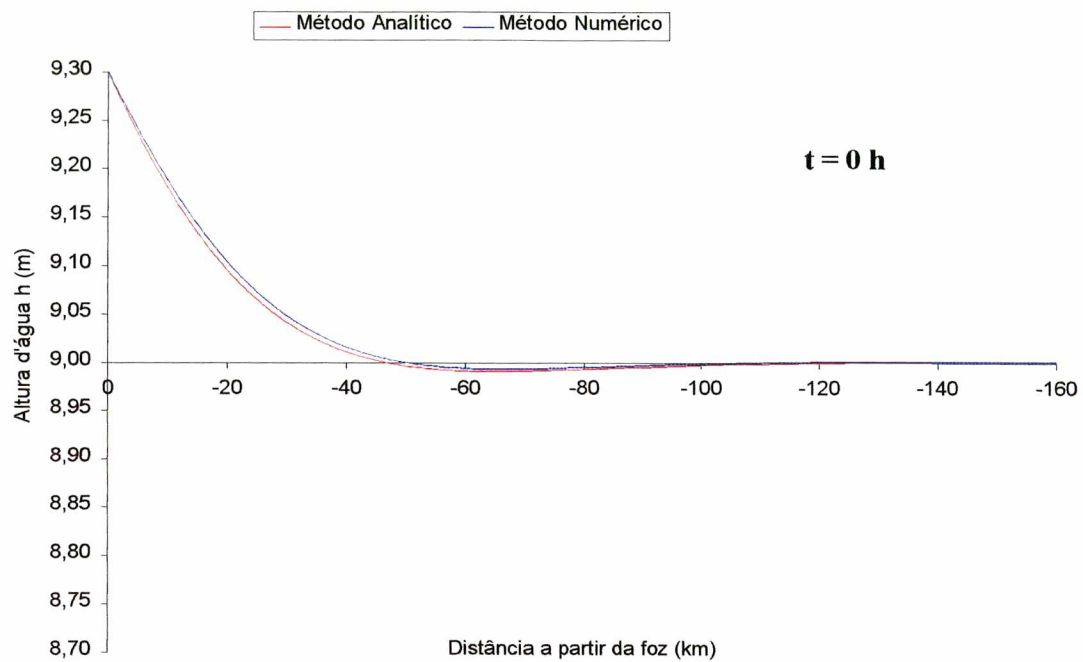


Figura 4.3 (continuação)

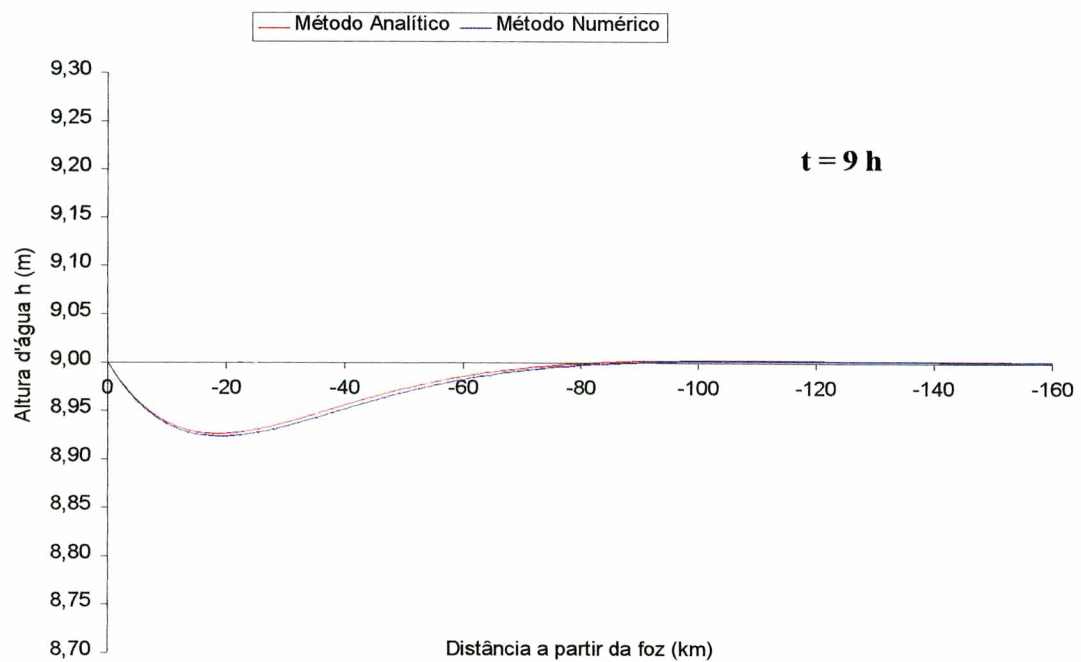
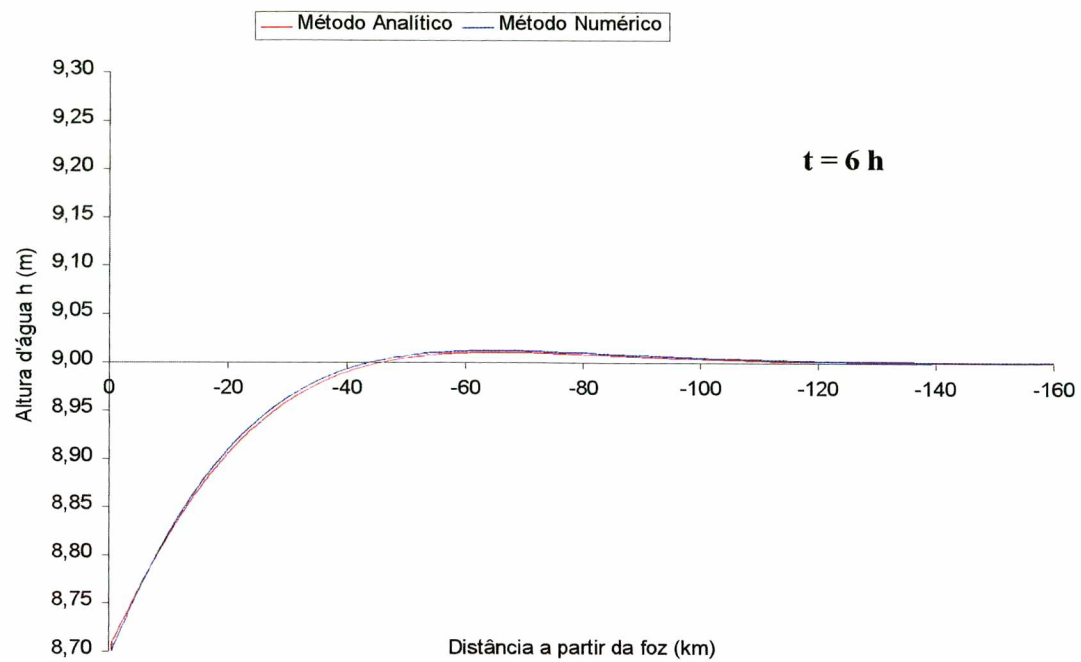


Figura 4.4 Velocidades da corrente fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes  $t = 0, 3, 6$  e  $9$  h para um canal de maré com  $h_o = 9.0$  m,  $u_o = 1.49$  m/s,  $S_o = 1:12000$ ,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 12$  h e  $a_o = 0.3$  m.

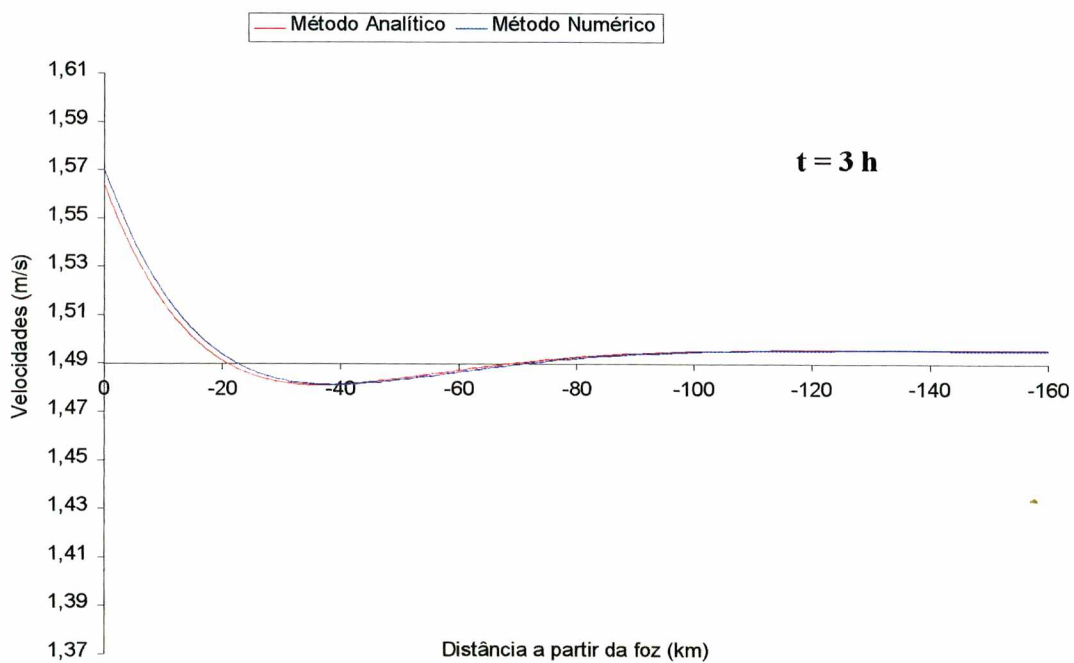
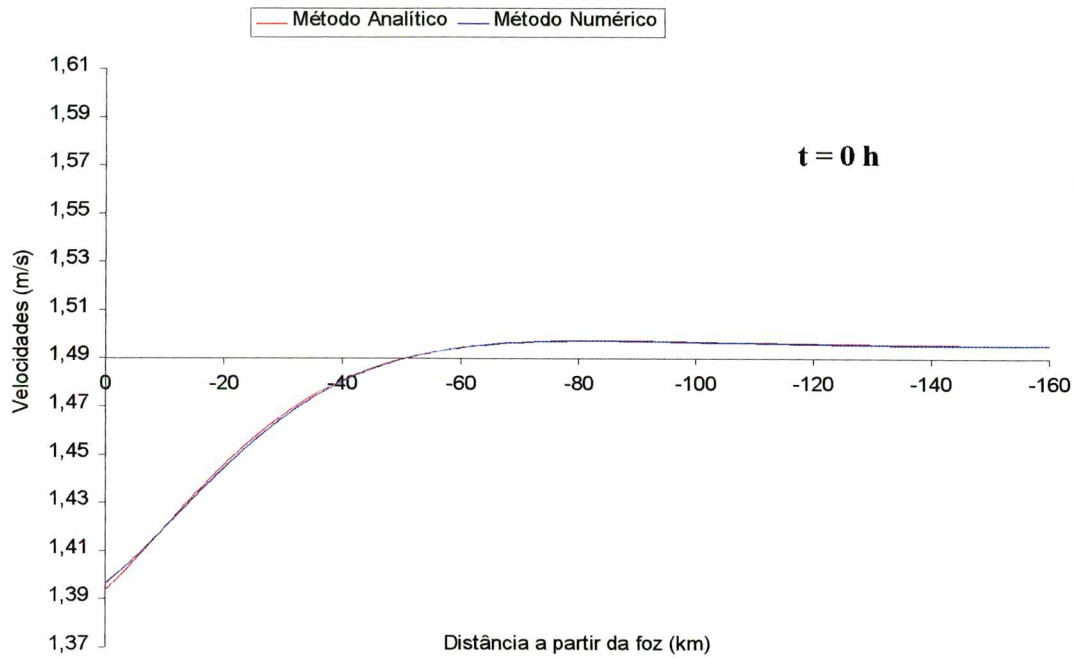
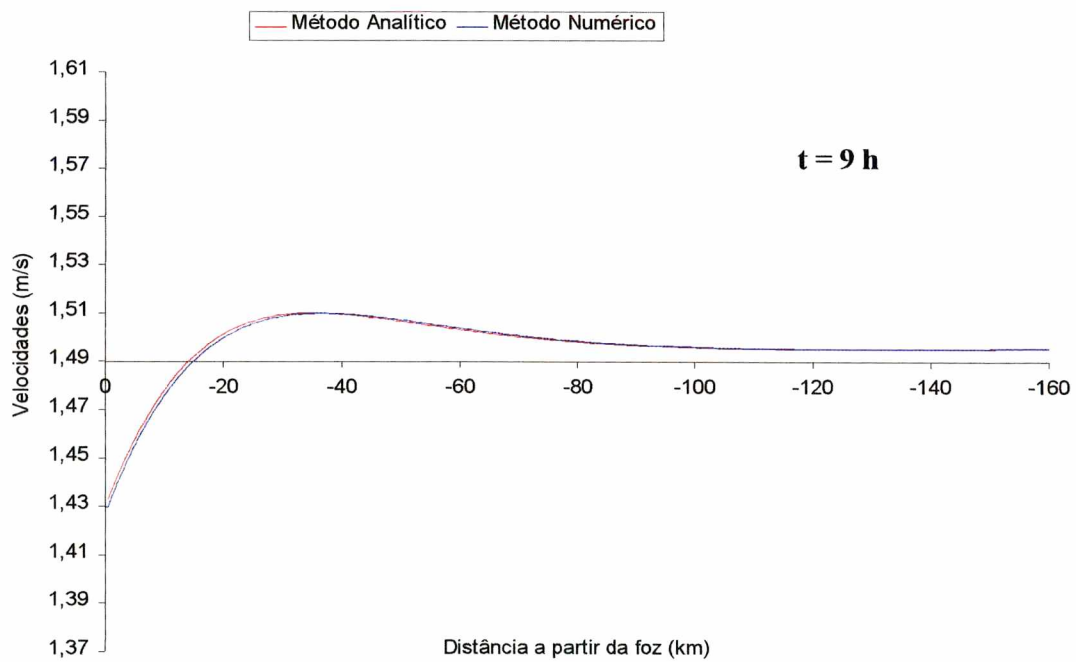
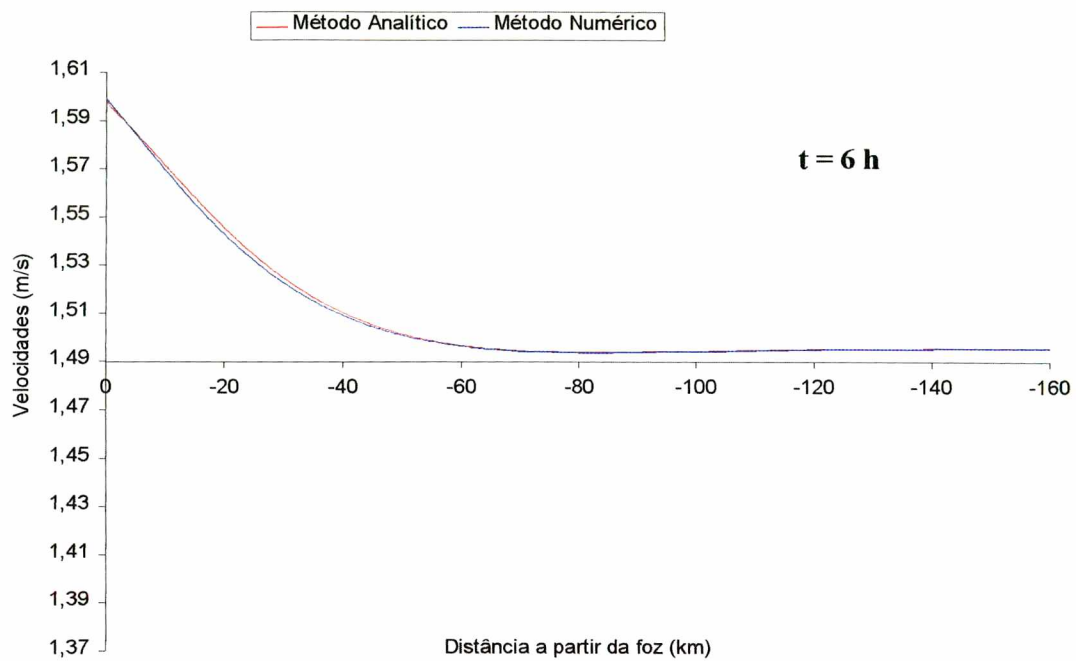


Figura 4.4 (continuação)



Analisando os resultados, a fig. 4.3 mostra claramente a rápida atenuação sofrida pela maré no interior do canal. De fato, numa distância um pouco menor que um comprimento de onda já não se detecta oscilação do nível d'água no canal. Embora a atenuação seja “rápida” quando comparada ao comprimento da onda, as distâncias *reais* envolvidas são bastante significativas.

Para melhor quantificar essa questão, vamos introduzir a grandeza  $X =$  *distância de penetração da maré* definida como a posição para a qual a amplitude da maré se reduz a 1 % da amplitude na foz. Usando esta definição na eq. (46), chega-se à seguinte expressão para a distância de penetração  $X$ :

$$X = \frac{\ln(0.01)}{k_r} \quad (56)$$

Assim, substituindo-se o valor de  $k_r$ , calculado acima nessa última expressão obtém-se uma distância de 103 km. A título apenas de *ilustração*, tomando o rio Itajaí-Açu como referência, uma distância de penetração da ordem de 100 km a partir da foz indicaria que a presença da maré deve ser percebida na cidade de Blumenau, distante 65 km da costa.

A velocidade de propagação da onda de maré rio acima pode também ser obtida substituindo os valores de  $s$  e  $k_i$  na expressão (47), resultando numa velocidade  $C_M = 4.3$  m/s. É interessante observar que essa velocidade é consideravelmente menor que a velocidade que uma onda de gravidade longa e de pequena amplitude teria num canal de maré hipotético sem atrito e com corrente  $u_o$ , que seria:  $\sqrt{gh_o} - u_o = 7.9$  m/s.

Conforme explicado no capítulo III, a precisão da solução analítica deve ser tão melhor quanto menor for  $\varepsilon$  - a relação entre a amplitude da maré e a altura d'água normal do rio ( $h_o$ ). Com o intuito de verificar tal característica, realizou-se uma outra simulação na qual a amplitude da maré foi aumentada drasticamente para  $\alpha_o = 3.0$  m o que dá  $\varepsilon = 0.33$  (teoricamente fora do limite de validade da solução analítica). Os resultados para o nível d'água e a velocidade da corrente estão apresentados nas figs. 4.5 e 4.6 respectivamente.



Figura 4.5 Alturas d'água fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes  $t = 0, 3, 6$  e  $9$  h respectivamente, para um canal com  $h_o = 9.0$  m,  $u_o = 1.49$  m/s,  $S_o = 1:12000$ ,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 12$  h e  $\alpha_o = 3.0$  m.

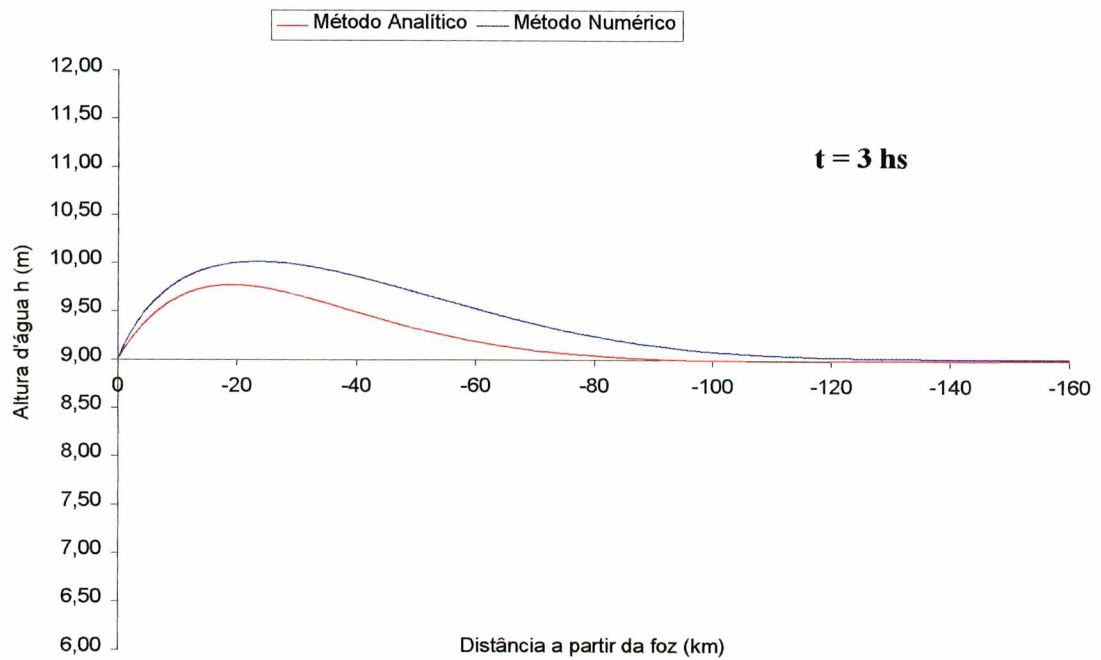
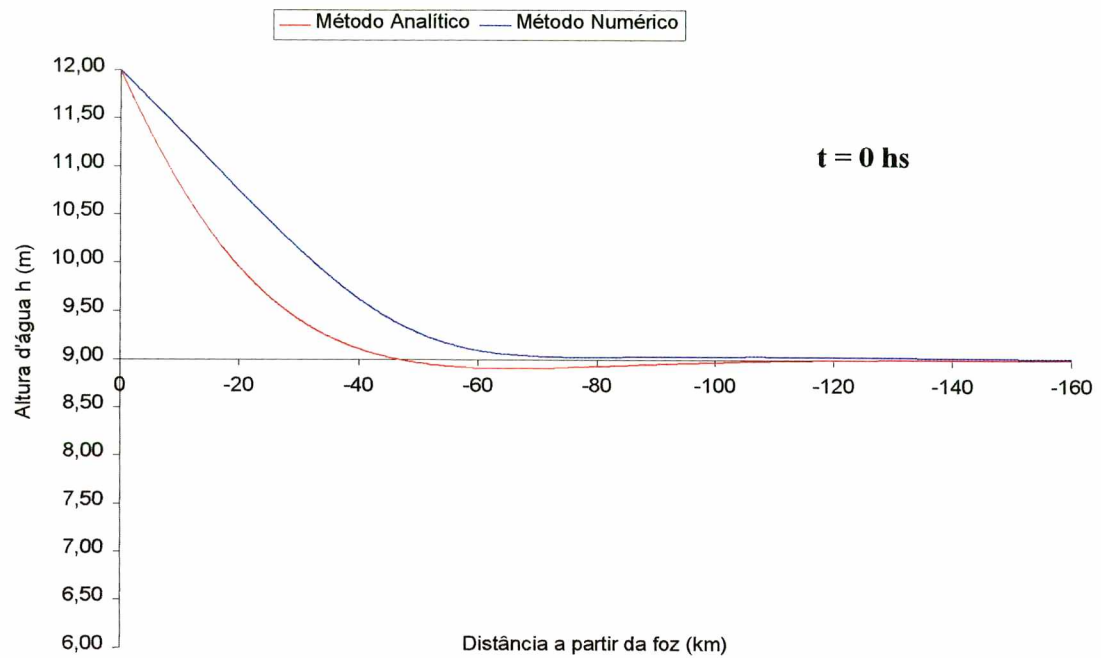


Figura 4.5 (continuação)

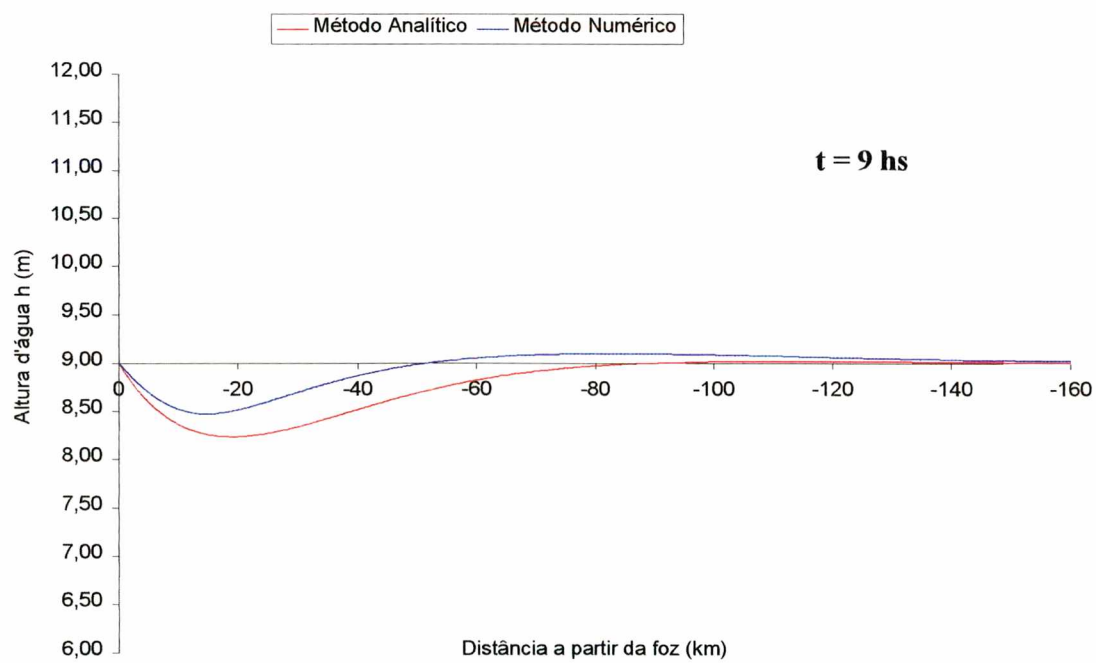
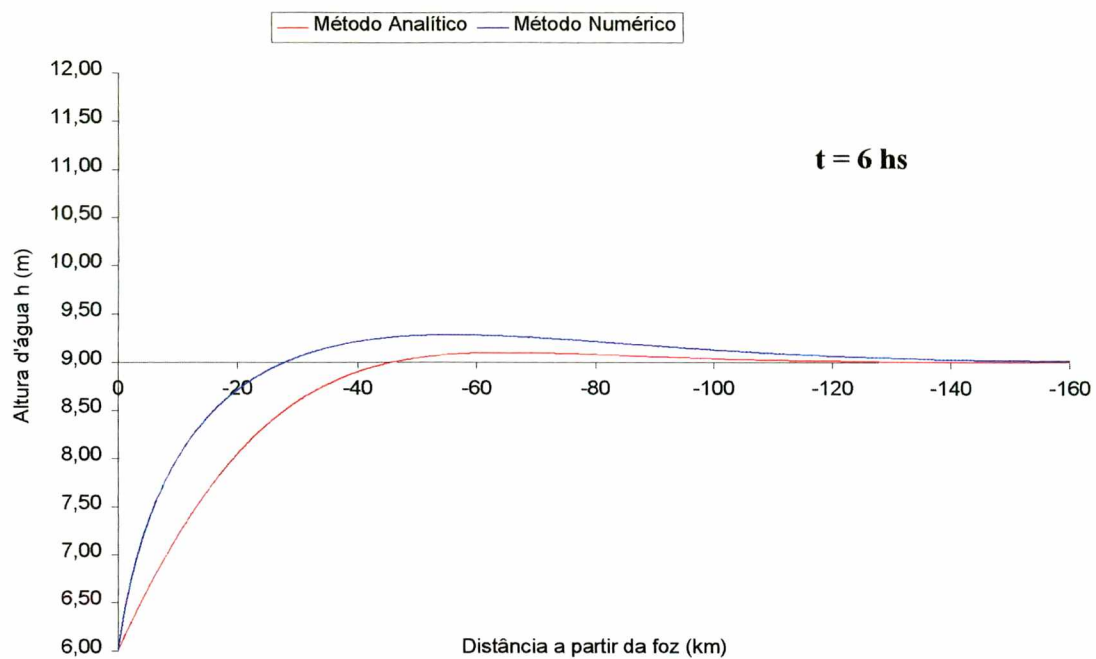


Figura 4.6 Velocidades da corrente fornecidas pelas soluções numérica e analítica nos instantes  $t = 0, 3, 6$  e  $9$  h para um canal com  $h_o = 9.0$  m,  $u_o = 1.49$  m/s,  $S_o = 1:12000$ ,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 12$  h e  $\alpha_o = 0.3$  m.

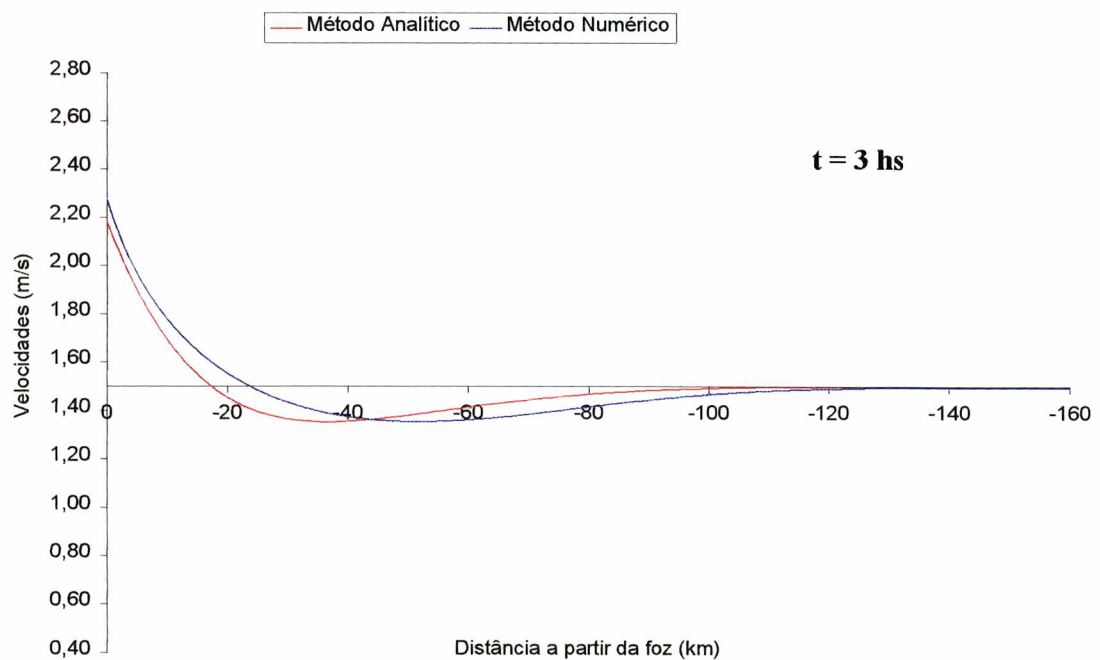
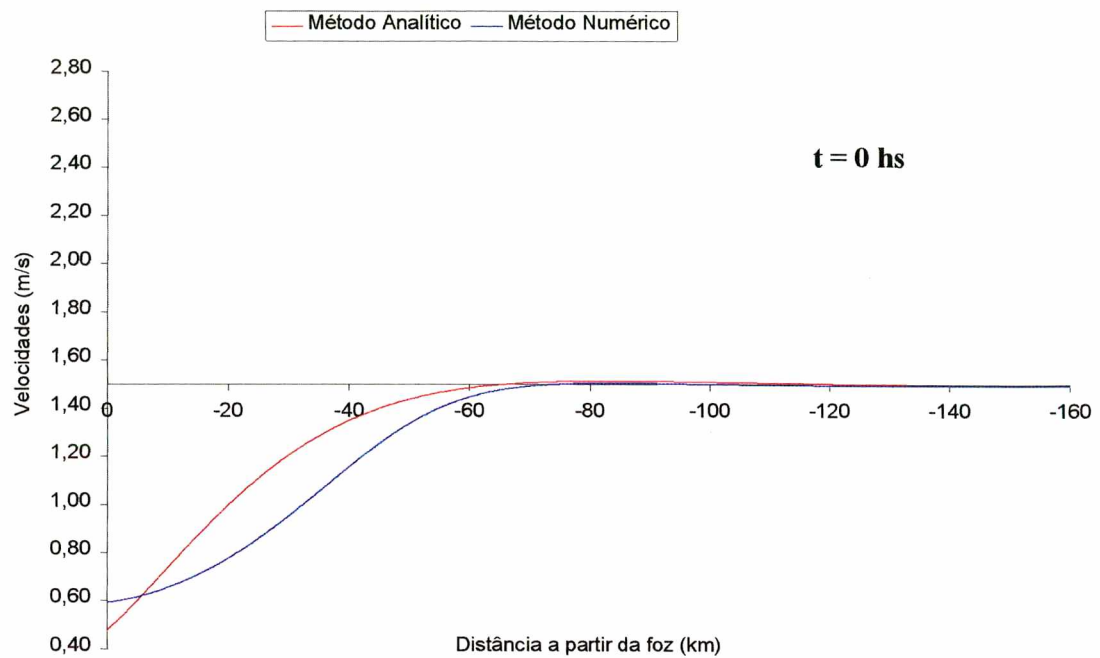
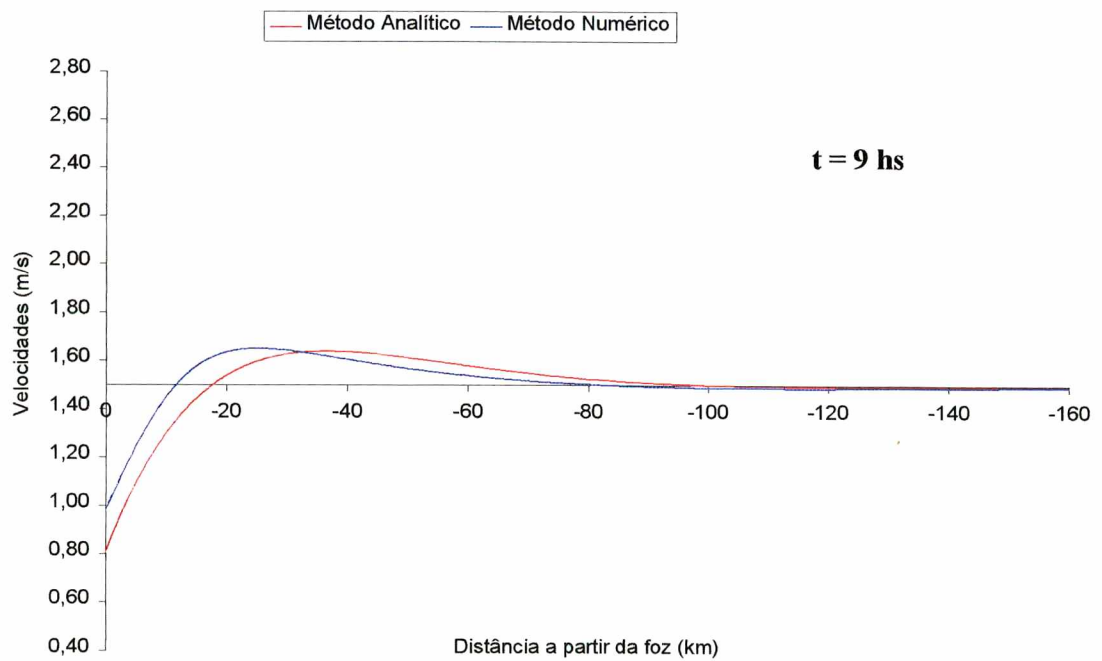
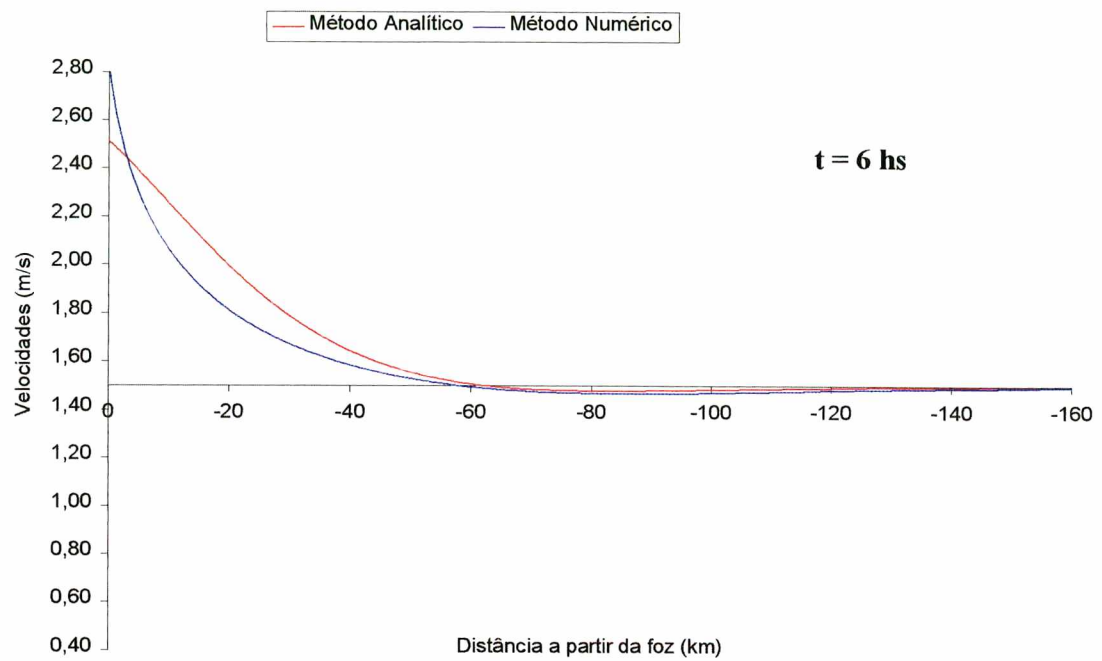


Figura 4.6 (continuação)



Pode-se observar que a concordância dos resultados analítico e numérico piorou sensivelmente, como esperado. Analisando a fig. (4.5), vê-se que a solução numérica agora tende a ser bastante *assimétrica* em relação ao nível normal com a altura d'água atingindo níveis relativos mais altos que no caso anterior ( tanto na maré alta quanto na maré baixa ) como se o *nível médio* do rio houvesse se *elevado* com respeito a  $h_o$ . Na verdade tal sobrelevação do nível médio é efetivamente prevista pela solução numérica como se pode verificar na fig. (4.7).

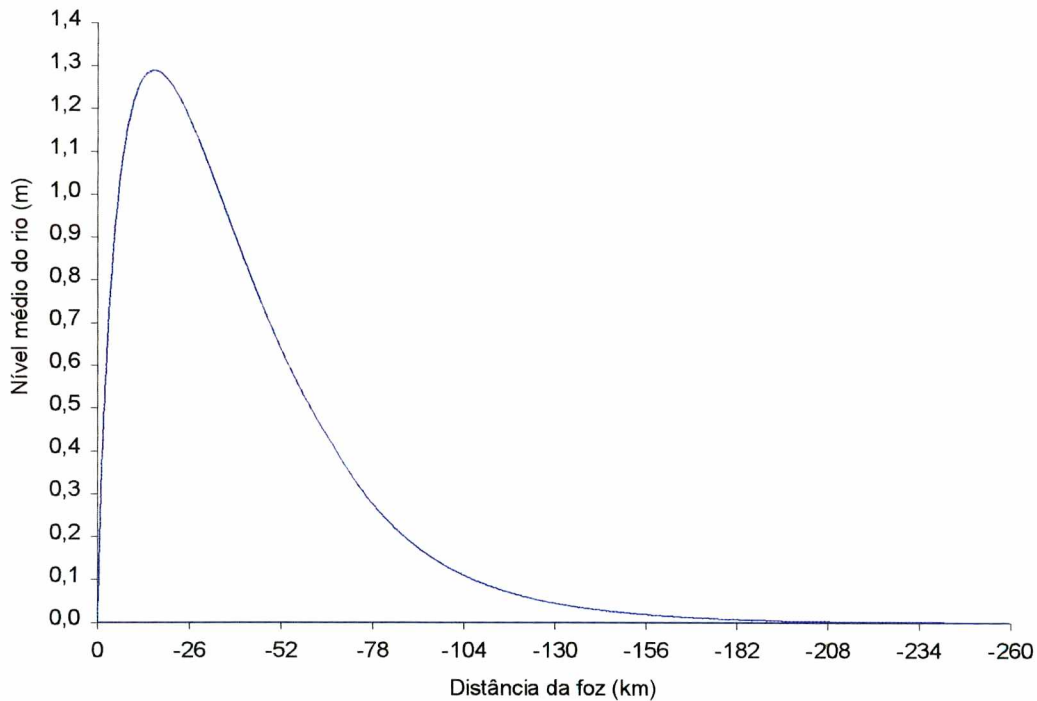


Figura 4.7 Nível médio  $\bar{h}(x)$  do rio para maré de grande amplitude.

Esse efeito de *aprisionamento* das águas por efeito da maré se manifesta no modelo analítico apenas na solução de ordem ( $\varepsilon^2$ ) e por isso não aparece no presente resultado. A solução de  $O(\varepsilon^2)$  transcende os objetivos da presente dissertação e está sendo investigada por Melo (1998).

### 4.3.2 Resposta da distância de penetração da maré à variações no período, na vazão e na declividade do rio

Os testes efetuados na seção anterior demonstram a boa concordância entre as soluções analítica e numérica para valores pequenos de  $\varepsilon$  evidenciando assim a consistência dos resultados. Nesta seção, a facilidade de aplicação do modelo analítico será explorada para investigar a resposta da distância de penetração da “maré” (X) à variações de três parâmetros básicos do problema: o período da onda, a vazão e a declividade do rio.

Iniciando com o período, a fig. (4.8) mostra um gráfico de X x T para períodos na faixa de 30 min. < T < 72 h (com os valores dos demais parâmetros mantidos fixos como indicado na figura). A curva mostra que a distância X *aumenta* a medida que o período aumenta. Se considerarmos um local onde a maré astronômica possua componentes semi-diurnas (T em torno de 12 h) e diurnas ( T em torno de 24 h) verificamos que estas últimas serão capazes de penetrar no rio até uma distância maior que as primeiras de acordo com a solução do problema. Se, ainda, representarmos a maré meteorológica por uma onda periódica de longo período – digamos, 72 h – é possível inferir que esta penetrará ainda mais longe no rio que a maré astronômica.

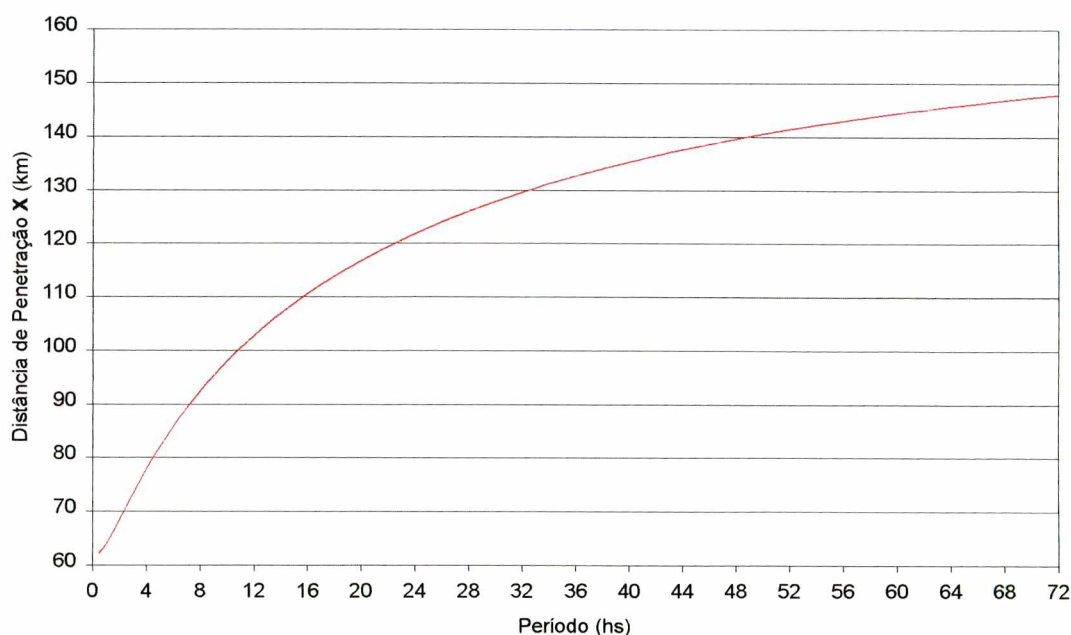


Figura 4.8 Distâncias de penetração da onda num canal fluvial com  $a_o = 0.3$  m,

$$C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}, q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}, S_o = 1:12000 \text{ e } 30 \text{ min} < T < 72 \text{ h}.$$



O segundo teste refere-se ao parâmetro  $q$  (vazão). Tal teste é de interesse pois permite avaliar o grau de participação da maré em eventos de cheia em rios. A fig. (4.9) mostra o gráfico de  $X$  x  $q$  para diferentes valores da vazão por unidade de largura  $q$ . Curiosamente, os resultados indicam que um aumento da vazão acarreta um *aumento* na distância de penetração da maré contrariando, talvez, a intuição física que se tem do problema.

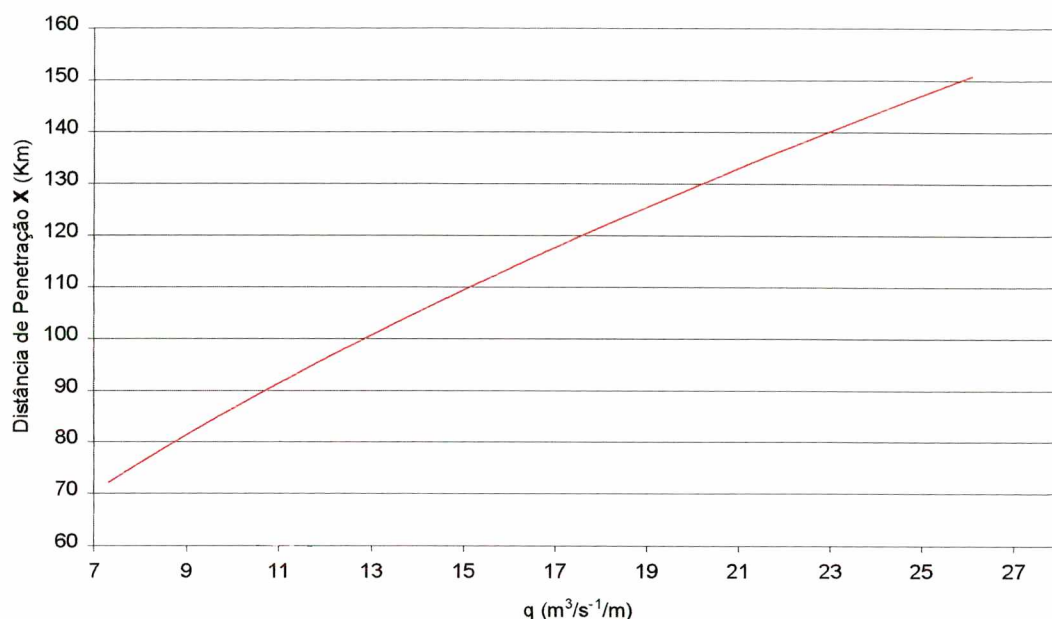


Figura 4.9 Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com  $\alpha_o = 0.3$  m,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $S_o = 1:12000$ ,  $T = 12\text{h}$  e  $7.5 < q < 26 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}/\text{m}$ .

Tal comportamento pode ser atribuído ao fato que num escoamento permanente uniforme um aumento de vazão implica *necessariamente* num aumento simultâneo do nível d'água e da velocidade da corrente.

De fato, os testes apresentados nas fig. (4.10) e fig. (4.11) comprovam que um aumento do nível com a velocidade fixa *favorece* a penetração da onda de maré enquanto que um aumento na velocidade com o nível fixo *é* desfavorável. Ocorre que, no caso mostrado na fig. 4.9, o primeiro efeito (aumento do nível) domina o segundo (aumento da velocidade) ocasionando o resultado mostrado.

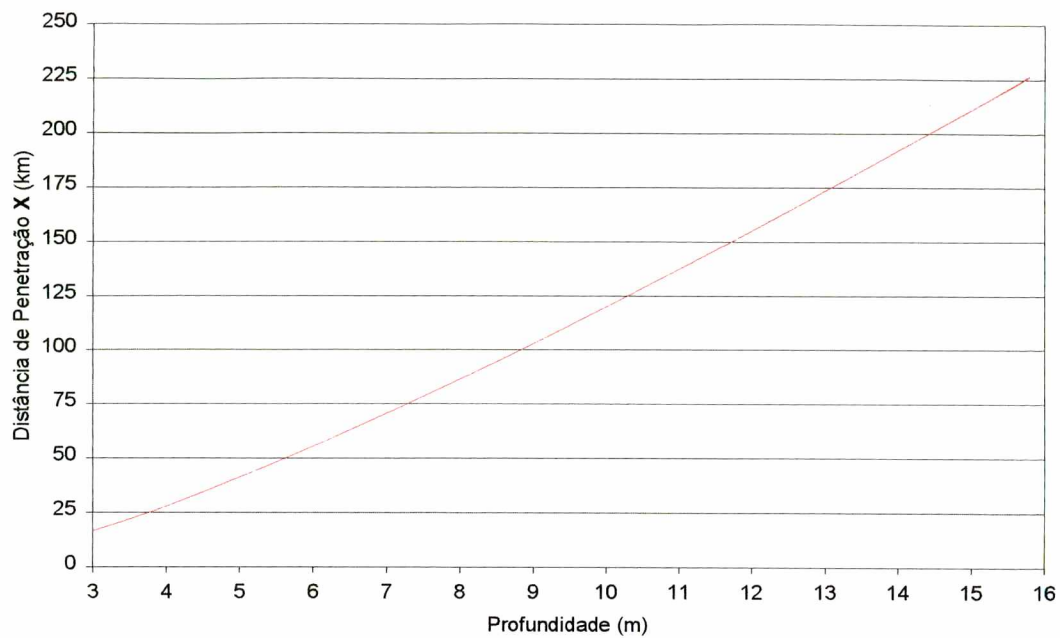


Figura 4.10 Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com

$\alpha_o = 0.3$  m,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $u_o = 1.49$  m/s,  $T = 12$ h e  $3 < h_o < 16$  m.

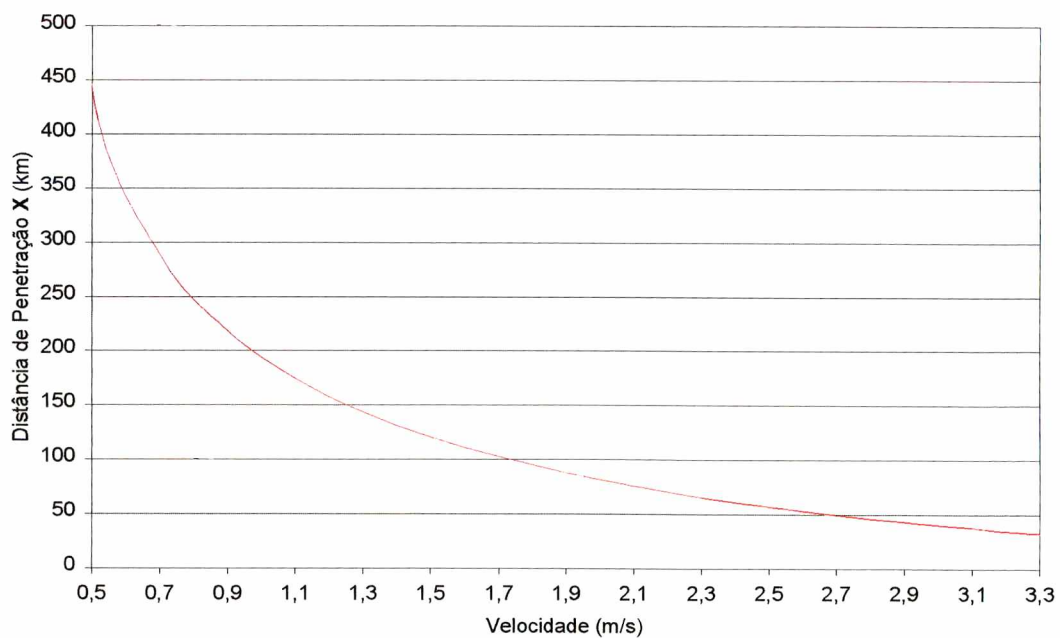


Figura 4.11 Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com

$\alpha_o = 0.3$  m,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $h_o = 9$  m,  $T = 12$ h e  $0.5 < u_o < 3.3$  m/s.



Essa conclusão não deve ser extrapolada diretamente para casos em que o escoamento básico se dá em regime permanente *não-uniforme* pois nesses a existência de uma curva de remanso a partir da foz sobre a qual a maré atua pode alterar o cenário descrito acima.

O terceiro e último teste diz respeito à variação na declividade dos rios. A fig. (4.12) mostra o gráfico  $X \times S_o$  para  $S_o$  dentro de uma faixa de interesse. Tomando, para efeito de raciocínio, o caso de dois canais semelhantes que transportem a mesma vazão mas que tenham declividades diferentes, os resultados indicam que a maré irá penetrar menos no canal mais íngreme. Aqui a interpretação física é mais simples pois o canal de maior declividade transportará, em regime permanente uniforme, a mesma vazão com maior velocidade e menor altura d'água que o outro. Nesse caso, ambos os efeitos contribuem para a atenuação mais rápida da maré e, conseqüentemente, uma menor penetração rio acima.

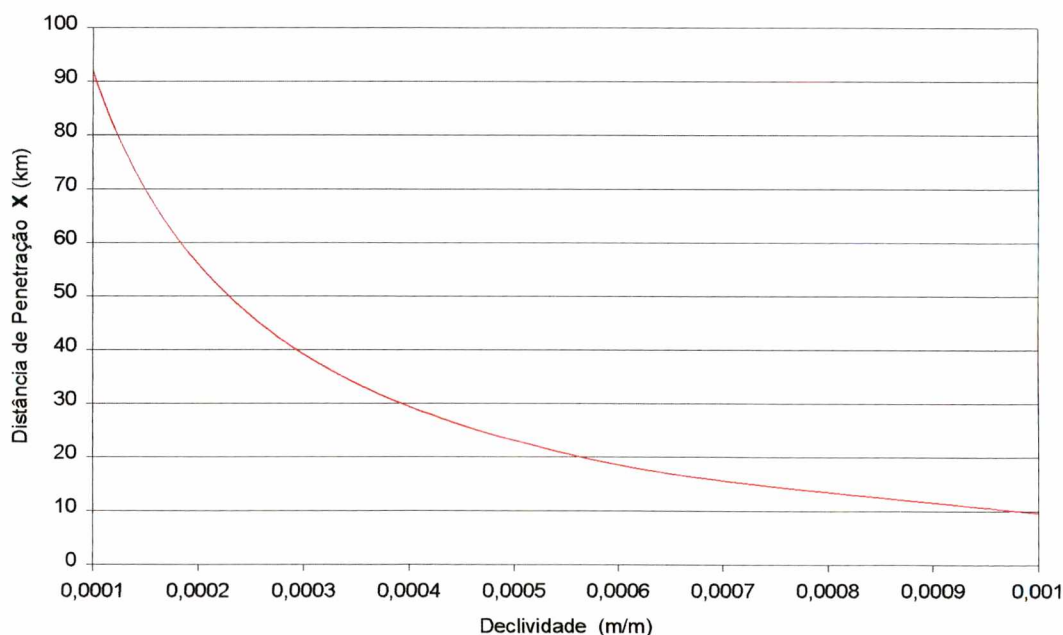


Figura 4.12 Distâncias de penetração da onda de maré num canal fluvial com

$$\alpha_o = 0.3 \text{ m}, C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}, q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}, T = 12 \text{ h e}$$

$$0.0001 < S_o < 0.001 \text{ m/m.}$$

#### 4.4 Solução não-permanente x solução permanente

Conforme mencionado anteriormente, o efeito da maré no escoamento de rios costeiros é muitas vezes considerado de forma aproximada através do traçado de *curvas de remanso* a partir da foz como se o escoamento se desse em regime *permanente*. Tendo encontrado uma solução para o problema completo (i.e. não-permanente) é possível agora avaliar *quantitativamente* as limitações e a precisão da aproximação permanente.

Em primeiro lugar, deve-se ressaltar que a aproximação permanente tem como limitação básica fundamental a incapacidade em prever os valores *instantâneos* do nível d'água e da velocidade da corrente pelo fato óbvio de que tais grandezas variam ao longo do tempo numa posição (x) qualquer. Por exemplo, nenhuma das curvas de altura d'água obtidas da solução não-permanente, mostradas nas figs.(4.3) e (4.5), correspondem a curvas de remanso. Assim, é impossível, através da aproximação permanente, determinar a altura d'água que está ocorrendo num determinado instante num ponto no interior do rio sabendo a altura, nesse mesmo instante, na foz. Esta informação seria de interesse no caso, por exemplo, de se desejar fazer uma previsão de maré para um local no interior do rio conhecendo-se a maré na foz e a vazão do rio.

Entretanto, em casos em que se deseja avaliar o risco de inundação de regiões ribeirinhas costeiras o interesse reside, não na determinação da posição *instantânea* do nível do rio, mas no valor *máximo* possível a ser atingido pela água. Sob esse ponto de vista é interessante comparar a curva de remanso obtida considerando o nível mais alto possível na foz com o nível d'água máximo previsto pela solução não-permanente dado por:  $a_{max}(x) = a_0 e^{k_r x}$ . A curva de remanso, nesse e nos demais casos, resulta da solução numérica da versão permanente das eqs. de Saint-Venant (ver, por ex. Melo Fº, 1998) calculada através do bem conhecido "Step-Method" (Sellin, 1969). Note que, como o escoamento é sub-crítico, uma sobrelevação do nível d'água na foz resulta num remanso do tipo M1. A fig. (4.13) mostra tal comparação normalizada pela amplitude na foz para o caso da maré de amplitude 0.3 m na qual a solução

analítica se aplica. O resultado da solução numérica também foi incluído para complementar o teste.

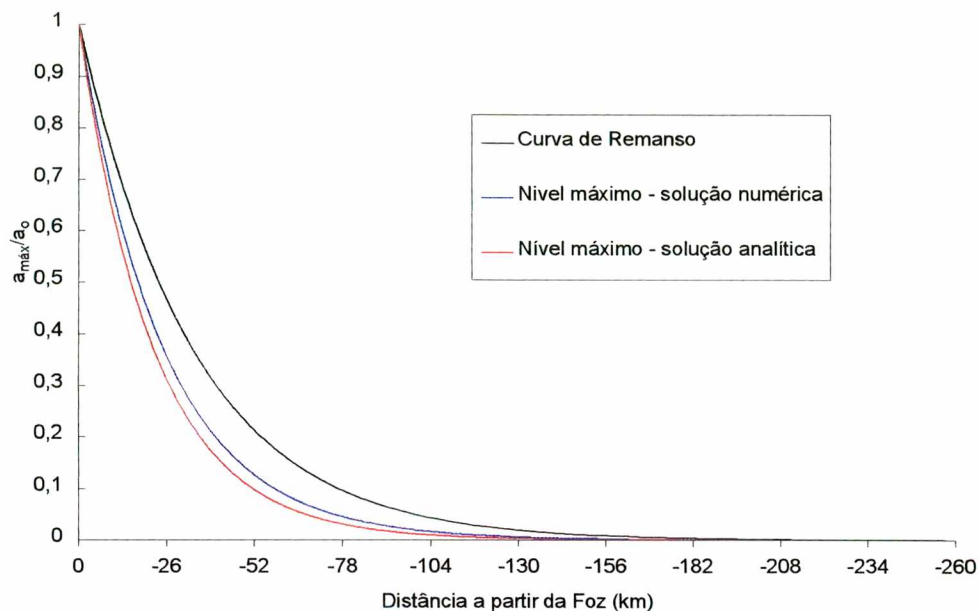


Figura 4.13 Comparação da curva de remanso normalizada (aproximação permanente) com os níveis d'água máximos previstos pela solução não-permanente (numérica e analítica) para um canal com  $h_o=9.0$  m,  $a_o=0.3$  m,  $C_f=54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $q=13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ ,  $T=12$  h e  $S_o=1:12000$ .

Pode-se verificar, analisando a fig. (4.13), que a curva de remanso prevê níveis d'água *maiores* que o máximo das soluções não-permanente em *todos* os pontos ao longo do canal.

A fig. (4.14) mostra a mesma comparação para o caso da maré de amplitude 3.0 m no qual a solução analítica já não se aplica e a solução numérica é mais confiável. Novamente, verifica-se que a curva de remanso superestima o nível d'água máximo previsto para o escoamento não-permanente ao longo de todo o canal.

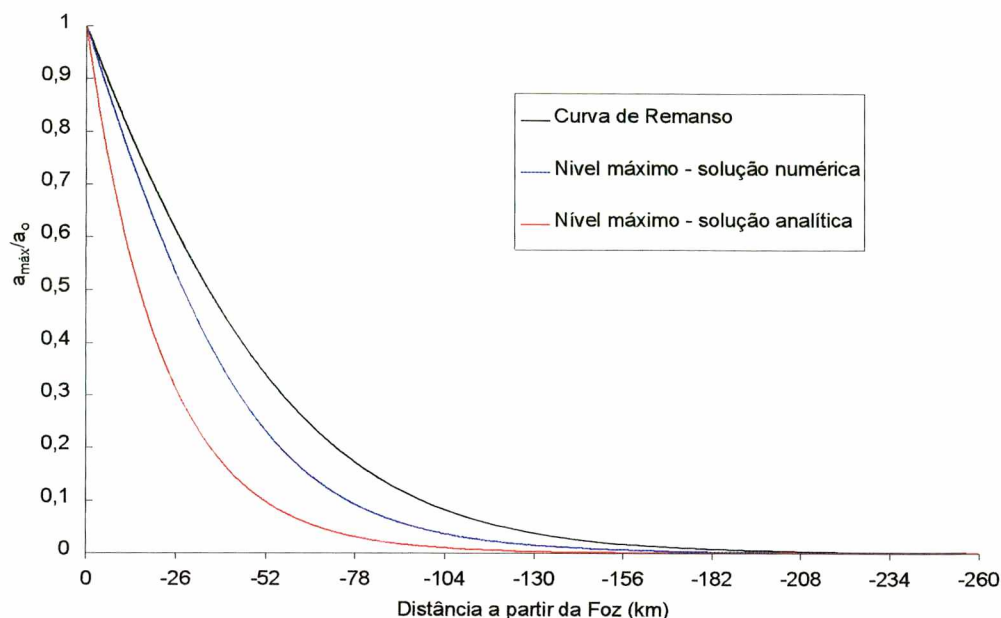


Figura 4.14 Comparação da curva de remanso normalizada (aproximação permanente) com os níveis d'água máximos previstos pela solução não-permanente (numérica e analítica) para um canal com  $h_o=9.0$  m,  $\alpha_o = 3.0$  m,  $C_f=54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $q=13.45 \text{ m}^3\text{s}^{-1} / \text{m}$ ,  $T=12$  h e  $S_o=1:12000$ .

Finalmente, podemos usar a solução analítica para verificar a validade de se interpretar uma curva de remanso como um *caso limite* da solução não-permanente quando o período da onda se torna muito grande. Para tanto, foi “plotado” na fig. 4.15 uma comparação da curva de remanso dada pelo “Step-Method” com o nível d'água máximo previsto pela solução analítica para valores sempre crescentes de  $T$ . Os resultados mostram claramente que a solução não-permanente para  $a_{\max}$  se aproxima progressivamente do remanso a medida que  $T$  cresce confirmando, como esperado, a interpretação acima. É interessante observar, todavia, que para que haja uma concordância *exata* entre as duas o período da onda tem que ser *realmente* grande, pois mesmo com  $T=48$  h ainda se verifica uma discrepância pequena porém bastante perceptível entre  $a_{\max}$  e o remanso.



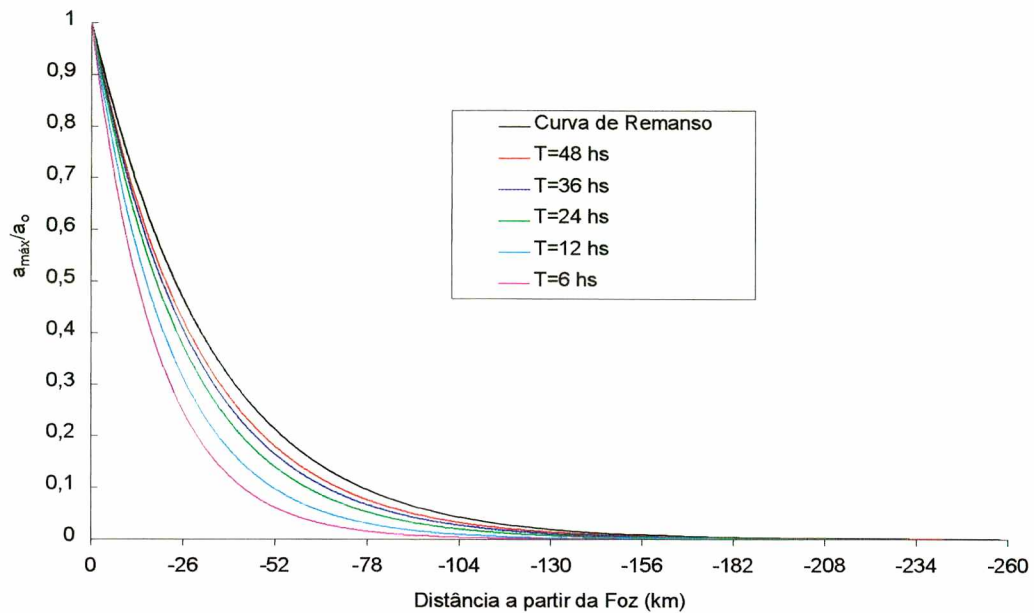


Figura 4.15 Comparação da curva de remanso dada pelo “Step-Method” com o nível d’água máximo previsto pela solução analítica para  $6 \text{ h} < T < 48 \text{ h}$  num canal fluvial com  $h_o = 9.0 \text{ m}$ ,  $a_o = 0.3 \text{ m}$ ,  $C_f = 54.6 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ ,  $q = 13.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / \text{m}$ ,  $T = 12 \text{ h}$  e  $S_o = 1:12000$ .

Como conclusão preliminar desse último teste pode-se inferir que de acordo com a solução analítica a aproximação permanente (curva de remanso) pode ser usada na falta de um método mais preciso, e como uma estimativa a favor da segurança do nível d’água máximo ocasionado pela maré no interior do rio.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O presente trabalho analisou o efeito da maré num canal fluvial idealizado através da solução das equações de Saint-Venant para um caso simplificado no qual a maré apenas perturba o escoamento permanente uniforme pré-existente no rio. Para um canal inspirado no rio Itajaí-Açu (SC), os resultados evidenciaram claramente a intensa atenuação que a maré sofre ao penetrar rio acima. A distância de atenuação da maré (X) ( definida como a posição para o qual a amplitude da maré se reduz a 1 % da amplitude na foz ) foi, nesse caso, de cerca de 100 km sugerindo que a influência da maré pode se fazer sentir na cidade de Blumenau distante cerca de 65 km da foz.

O efeito da maré em canais fluviais se manifesta através de uma onda que se propaga rio acima com uma velocidade de propagação, no caso estudado, quase 50 % menor do que a velocidade que uma onda de gravidade longa teria num canal puramente de maré.

Testes realizados com a solução analítica indicaram que a distância de penetração de maré:

- (i) aumenta com aumento do período da onda
- (ii) aumenta com o aumento da vazão do rio
- (iii) diminui com o aumento da declividade do rio

Finalmente, a validade da aproximação permanente usada em hidrologia – na qual o efeito da maré é representado por uma simples *curva de remanso* – foi verificada através de comparações com a solução não-permanente obtida. Os resultados indicam que a curva de remanso *superestima* o nível máximo atingido pela água no interior do rio por efeito da maré.

O trabalho apresentado nessa dissertação é fruto de uma linha de pesquisa sobre o assunto “*Maré em Rios*” atualmente em desenvolvimento no LHAHIMAR (Laboratório de Hidrologia Aplicada e Hidráulica Marítima). O aperfeiçoamento de métodos matemáticos para o estudo desse fenômeno – ora em curso no laboratório – permitirá, em breve, a modelação de casos práticos reais como, por exemplo, a maré no rio Itajaí-Açu. Entretanto, a obtenção de dados de campo, atualmente inexistentes, coloca-se como um desafio a ser vencido para o progresso das pesquisas nessa área.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOTT, M. B. & BASCO, D. R. - *Computational Fluid Dynamics, an Introduction for Engineers*, Longman Group, UK Limited, 1989.
- DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. - *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Inc., 353p., 1984.
- GODIN, G. - Modification of River Tides by the Discharge, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, v.111, n.2, pp. 257-274, March, 1985.
- KOVACS, Y.- *Modeles de Simulation D'Ecoulement D'Assainissement*, These de Doctorat, L'Ecole Nationale des Ponts et Chausses, Soutene-França, 329 p., 1988.
- MARTINS R. P. - *Um modelo 2D-H de Circulação em Corpos d'água com Áreas Alagáveis*. Tese de mestrado, Prog. Eng. Oceânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 70 p., 1992.
- MELO E., - *River Tides Revisited*, em preparação, 1999.
- MELO Fº E. - Considerações Sobre a Hidráulica de Canais Fluviais e de Canais de Maré, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.3, n.2, pp. 95-107, 1998.
- MORRIS, E. M. - The Effect of the Small-Slope Approximation and Lower Boundary Conditions on Solutions of the Saint-Venant Equations, *Journal of Hydrology*, v.40, pp. 31-47, 1979.
- OFFICER, C.B. - *Physical Oceanography of Estuaries (and associated waters)*, A Wiley-Interscience publication, 465p., 1976.



PAIVA, A.M. - *Desenvolvimento de um Modelo Numérico de Circulação em Estuários Estratificados*. Tese de mestrado, Prog. Eng. Oceânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 97 p., 1992.

SELLIN, R. H. J - *Flow in Channels*, Macmillan Engineering Hydraulics Series, New York. 1969.

TAYFUR, G.; - KAVVAS, M. L.; GOVINDARAJU, R. S. & STORM, D. - Applicability of Saint-Venant Equations for two-dimensional Overland Flows over Rough Infiltrating Surfaces, *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 119, n. 1, pp 51-63,. 1993.